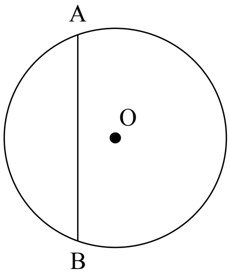
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه ۲ تکالیف عید

دبیرستان سپهر دانش

فصل اول : دایره

۱ – در دایرهٔ شکل زیر، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطهٔ C روی دایره به گونه‌ای قرار دارد که مساحت مثلث ABC، دارای بیشترین مقدار ممکن و برابر ۳۲ واحد مربع است. طول قطر دایره کدام است؟

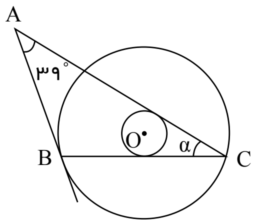


① ۱۰ ② ۱۲ ③ ۱۳ ④ ۱۵

۲ – در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$ و $a=8$ و میانهٔ m_a، در کدام حالت جواب منحصربه‌فرد است؟

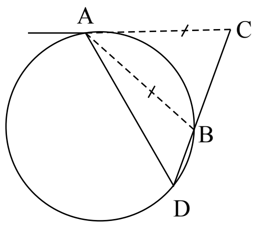
① $m_a=3$ ② $m_a=\sqrt{15}$ ③ $m_a=7$ ④ $m_a=2\sqrt{5}$

۳ – دو دایرهٔ هم‌مرکز مطابق شکل، مفروض‌اند. پاره خط‌های AC و BC بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس‌اند و پاره‌خط AB در نقطهٔ B بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس می‌باشد. اندازهٔ α کدام است؟



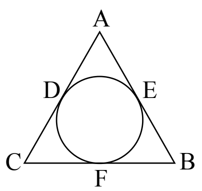
① 30° ② 32° ③ 34° ④ 36°

۴ – در شکل زیر، اندازهٔ قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



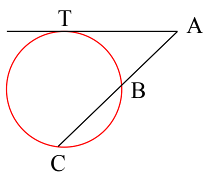
① $BC=BA$ ② $BD=AC$ ③ $BC=BD$ ④ $DA=DC$

۵ – مطابق شکل زیر دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$، در نقاط D، E و F بر اضلاع این مثلث مماس است. اگر $AE=2$ و $CF=8$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$

۶ – در دایرهٔ مقابل، AT مماس بوده و $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CT}=2\overset{\frown}{BT}$. زاویهٔ A چند درجه است؟



① ۱۸ ② ۷۲ ③ ۳۶ ④ ۵۴

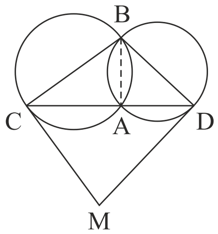
۷ – نسبت مساحت نه‌ضلعی منتظم محاطی دایره‌ای به شعاع ۵ به مساحت نه‌ضلعی منتظم محیطی این دایره کدام است؟

① $\cos^2 40^\circ$ ② $5\cos^2 20^\circ$ ③ $5\cos^2 40^\circ$ ④ $\cos^2 20^\circ$

۸ - دو دایرهٔ مساوی $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع ۵ مماس خارج هستند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ $C_۱$ مماس باشد و در دایرهٔ $C_۲$ وتری به طول ۶ جدا کند؟

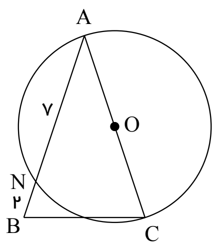
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۹ - مطابق شکل، دو دایره در نقاط A و B متقاطعند. از نقطه‌ی A خطی رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقاط C و D قطع کند، سپس از C و D مماس‌هایی بر هر یک از دایره‌ها رسم می‌کنیم که این مماس‌ها در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $DM > DB$ و $CB > CM$، چهارضلعی $BCMD$ چگونه است؟



(۱) فقط محاطی
(۲) فقط محیطی
(۳) هم محیطی و هم محاطی
(۴) نه محیطی و نه محاطی

۱۰ - در شکل زیر مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین، $AN = ۷$ و $BN = ۲$ و O مرکز دایره است. اندازه‌ی قاعده‌ی BC کدام است؟

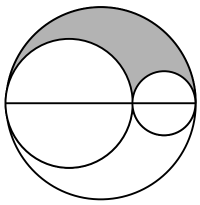


(۱) ۴ (۲) ۴٫۸
(۳) ۶ (۴) ۷٫۲

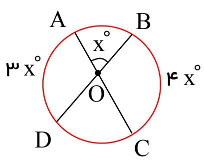
۱۱ - فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکز دایره $\frac{۱۳}{۲}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بر دایره چه‌قدر است؟

(۱) $۳\sqrt{۲}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{۱۳}$ (۴) $\sqrt{۶}$

۱۲ - مطابق شکل در دایره‌ای به شعاع $R = ۶$، دو دایرهٔ مماس خارج طوری قرار دارند که با دایرهٔ بزرگ‌تر مماس داخل بوده و سه نقطهٔ تماس در یک امتداد هستند. اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ کوچک‌تر برابر با $۴\sqrt{۲}$ باشد، مساحت قسمت هاشورزده کدام است؟



(۱) ۸π (۲) ۱۲π
(۳) ۱۶π (۴) ۲۴π



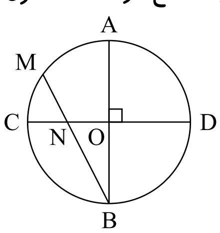
۱۳ - در دایرهٔ مقابل، مقدار x کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳۰
(۳) ۴۰ (۴) ۳۶

۱۴ - در مثلث ABC با ضلع $BC = ۸$ و زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰^\circ$ ، فاصله ی مرکز دایره محیطی از ضلع BC کدام است؟

(۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ (۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۵ - در دایره $C(O, ۳)$ دو قطر عمود بر هم AB و CD را به گونه‌ای رسم کرده‌ایم که وتر BM قطر CD را در نقطهٔ N به فاصلهٔ ۴ از B قطع کرده است. طول پاره‌خط MN کدام است؟

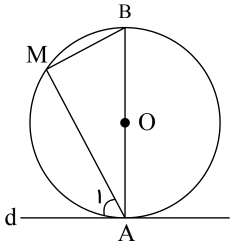


(۱) ۰٫۵ (۲) ۱
(۳) ۱٫۵ (۴) ۲

۱۶ - مساحت دایرهٔ محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۲۷π است. اندازهٔ محیط این مثلث کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۷ – مطابق شکل زیر، خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,۴)$ مماس است. اگر $\hat{A}_۱ = ۳\alpha + ۱۵^\circ$ و $A\hat{B}M = ۵\alpha - ۲۵^\circ$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ M از قطر AB کدام است؟



(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۸ – اندازهٔ شعاع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب برابر ۱ و ۶ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

(۱) ۲
(۲) ۲٫۵
(۳) ۳
(۴) ۳٫۵

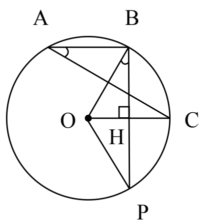
۱۹ – دایره‌ای در داخل ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین محاط است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ کوچک ذوزنقه ۷ و محیط آن برابر ۳۲ باشد، اندازهٔ ساق و قاعدهٔ بزرگ آن به ترتیب کدام است؟

(۱) ۸, ۷
(۲) ۹, ۷
(۳) ۹, ۸
(۴) ۱۰, ۸

۲۰ – در یک چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع غیرمجاور برابر ۱۸ و محیط دایرهٔ محاطی آن ۱۲٫۵۶ واحد است، مساحت قسمتی که بین دایره و چهارضلعی قرار دارد کدام است؟ $(\pi = ۳٫۱۴)$

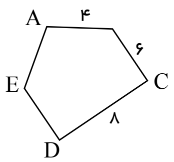
(۱) ۲۰٫۵۶
(۲) ۱۸
(۳) ۲۵
(۴) ۲۳٫۴۴

۲۱ – در شکل مقابل $B\hat{A}C = ۱۸^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ $O\hat{P}H$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



(۱) ۷۲°
(۲) ۳۶°
(۳) ۵۴°
(۴) ۱۸°

۲۲ – در پنج‌ضلعی $ABCDE$ عمودمنصف‌های اضلاع در نقطهٔ M همرسند. اگر طول اضلاع AB، BC و CD به ترتیب ۴، ۶ و ۸ باشد، نسبت $\dfrac{AM}{CM}$ کدام است؟



(۱) $\dfrac{۱}{۲}$
(۲) $\dfrac{۲}{۳}$
(۳) $\dfrac{۳}{۴}$
(۴) ۱

۲۳ – در مثلث ABC حاصل $OA^۲ + OB^۲ + OC^۲$ کدام است؟ (O مرکز دایرهٔ محاطی است.)

(۱) $۳r^۲$
(۲) $۳r^۲ - (p-a)^۲ - (p-b)^۲ - (p-c)^۲$
(۳) $۳r^۲ + (p-a)^۲ + (p-b)^۲ + (p-c)^۲$
(۴) $۶r^۲$

۲۴ – مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و ۷ مفروض است، نسبت قطعاتی که دایره محاطی داخلی مثلث بر روی ضلع کوچک‌تر جدا می‌سازد، کدام است؟

(۱) $\dfrac{۳}{۴}$
(۲) $\dfrac{۱}{۴}$
(۳) $\dfrac{۱}{۳}$
(۴) $\dfrac{۲}{۵}$

۲۵ – دو دایرهٔ $C_۱$ به شعاع $R_۱ = ۲$ و $C_۲$ به شعاع $R_۲ = ۴$ مفروض هستند. اگر فاصلهٔ مرکز دو دایره $O_۱O_۲ = ۱$ باشد، چند نقطه روی محیط دایرهٔ $C_۲$ یافت می‌شود که از آن دایرهٔ $C_۱$ به زاویهٔ قائمه رؤیت شود؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) بی شمار
(۴) هیچ

فصل دوم : تبدیل های هندسی

۲۶ - نتیجهٔ ترکیب چند انتقال عبارت است از:

۱) یک دوران ۲) یک تقارن محوری ۳) یک انتقال ۴) یک تجانس

۲۷ - ترکیبی از کدام دو تبدیل زیر، ایزومتری نیست ولی شیب خط ها را حفظ می کند؟

۱) انتقال و بازتاب نسبت به خط ۲) بازتاب نسبت به نقطه و دوران ۳) تجانس و بازتاب نسبت به خط ۴) بازتاب نسبت به نقطه و تجانس

۲۸ - دوران‌یافتهٔ دایرهٔ C، به مرکز $(۳,-۲)$ و شعاع $\frac{۵}{۲}$، تحت دوران $\frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دایرهٔ C' است. اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

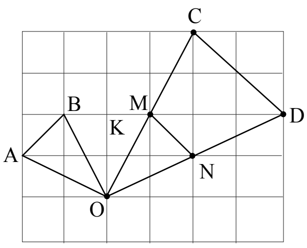
۲۹ - اگر بخواهیم در مثلث ABC قسمتی از ضلع AC را بر AB بازتاب کنیم، کدام مورد می‌تواند محور بازتاب باشد؟ $(AC > AB)$

۱) نیمساز داخلی $\hat{A}$ ۲) ارتفاع رأس A ۳) میانهٔ ضلع BC ۴) عمودمنصف ضلع BC

۳۰ - ترکیب یک تجانس با مرکز O و یک انتقال چه تبدیلی است؟

۱) یک تجانس ۲) یک انتقال ۳) یک بازتاب ۴) مشخّص نیست.

۳۱ - مطابق شکل، با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث OAB به مثلث OCD تبدیل می‌شود؟



۱) بازتاب محوری و تجانس

۲) دوران و تجانس

۳) بازتاب محوری و دوران

۴) گزینه‌های (۱ و ۲) درست است.

۳۲ - نقطهٔ M درون زاویهٔ $x\hat{O}y$ قرار دارد. می‌خواهیم A و B را بر Ox و Oy بیابیم که محیط $\overset{\triangle}{MAB}$ کمترین باشد. از کدام تبدیل استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) بازتاب مرکزی ۳) بازتاب محوری ۴) دوران

۳۳ - نقطهٔ A را تحت دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۰° تصویر می‌کنیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. اگر $OA = ۴\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ O از خط گذرنده از A و A' کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۳۴ - عکس کدام گزاره در مورد تبدیلات، همواره صحیح است؟

۱) اگر تبدیلی طولپا باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۲) اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند، آن‌گاه آن تبدیل از نوع بازتاب نیست.

۳) اگر دو شکل متجانس باشند، آن‌گاه متشابه‌اند.

۴) اگر یک تبدیل همانی باشد، آن‌گاه تمام نقاط صفحه، نقاط ثابت این تبدیل‌اند.

۳۵ - نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = ۱۶$، نقطهٔ O روی خط L و $OA = ۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از OA' کدام است؟

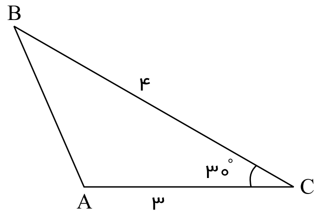
۱) ۴٫۸ ۲) ۶ ۳) ۷٫۲ ۴) ۹٫۶

۳۶ - دو دایرهٔ مماس خارج و به شعاع‌های ۱ و ۲، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز این دو تجانس از یکدیگر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۷ - اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و مساحت محصور بین مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{BG}$ برابر ۶ واحد مربع باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۳ ۴) ۵۴



۳۸ - مساحت تجانس‌یافتهٔ مثلث مقابل به ضریب تجانس معکوس k، برابر ۱۲ واحد مربع است. مقدار k کدام است؟

① ۲
② ۲−
③ ۴
④ ۴−

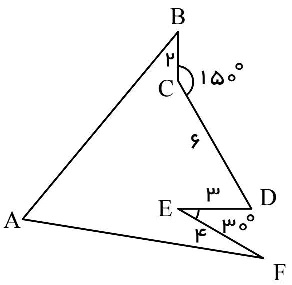
۳۹ - پاره‌خط MN به طول ۲ و خط d که همواره از نقطهٔ N می‌گذرد، مفروض هستند. هرگاه M' بازتاب M نسبت به d باشد، در این صورت با تغییر d، مجموعهٔ نقاط M' چه شکلی را به وجود می‌آورند؟

① دو خط موازی به فاصلهٔ ۲ از هم
② دایره‌ای به قطر ۲
③ دو خط موازی به فاصلهٔ ۴ از هم
④ دایره‌ای به قطر ۴

۴۰ - دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ ۳۰ درجه یکدیگر را قطع می‌کنند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. سپس $A'B'C'$ را نسبت به d_2 بازتاب داده و آن را $A''B''C''$ می‌نامیم. با تبدیل ABC به $A''B''C''$ کدام‌یک ثابت می‌ماند؟

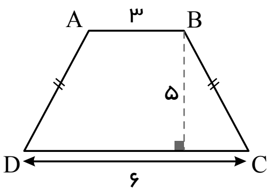
① فقط شیب ضلع‌ها
② فقط طول ضلع‌ها
③ هم شیب ضلع‌ها، هم طول ضلع‌ها
④ نه شیب ضلع‌ها، نه طول ضلع‌ها

۴۱ - دور زمین مقابل، حصارکشی شده است. بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را در ۲ مرحله افزایش داده‌ایم. میزان افزایش مساحت نهایی چقدر است؟



① ۱۴
② ۱۲
③ ۱۵
④ ۱۶

۴۲ - در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، $AB=۳$ و $CD=۶$ بوده و در دو تجانس به نسبت‌های $k_1=۲$ و $k_2=-۲$، AB بر CD تصویر می‌شود. فاصلهٔ مراکز تجانس چقدر است؟

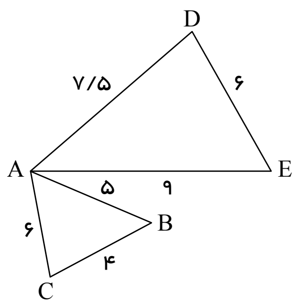


① $\frac{۱۰}{۳}$
② $\frac{۵}{۳}$
③ ۵
④ $\frac{۲۰}{۳}$

۴۳ - اگر $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ تحت تجانس به مرکز A و نسبت $k=۲$ و $A''B''C''D''$ مجانس $A'B'C'D'$ تحت تجانس به‌مرکز C و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ باشد، مساحت سطح محصور بین $A'B'C'D'$ و $A''B''C''D''$، چند برابر مساحت $ABCD$ است؟

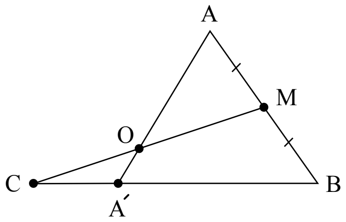
① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۴۴ - با توجه به شکل مقابل، با کدام تبدیل می‌توان مثلث ABC را متجانس مثلث ADE نمود؟



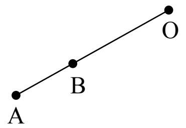
① دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}E$
② دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}D$
③ بازتاب محوری با محور AE
④ بازتاب نسبت به نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ADE

۴۵ - در شکل زیر، M وسط AB و $OM = ۳OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، مقدار k کدام است؟



① $\frac{-۳}{۱۰}$
② $-\frac{۱}{۷}$
③ $\frac{-۲}{۵}$
④ $-\frac{۱}{۹}$

۴۶ - اگر نقاط A' و B' به‌ترتیب مجانس‌های دو نقطهٔ A و B در تجانس به مرکز O و نسبت $k = \frac{۴}{۵}$ باشند و $AB = ۲۰$، آنگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A' و B' کدام است؟

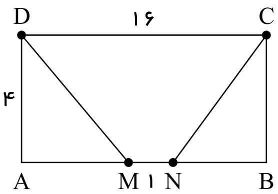


① ۲۰
② ۱۶
③ ۱۸
④ ۱۲

۴۷ - نقطهٔ O به فاصلهٔ ۱۲ واحد از خط d مفروض است. اگر خط d را حول نقطهٔ O، با زاویهٔ ۶۰° دوران دهیم تا خط جدید، خط d را در نقطهٔ P قطع کند، فاصلهٔ P تا مرکز دوران کدام است؟

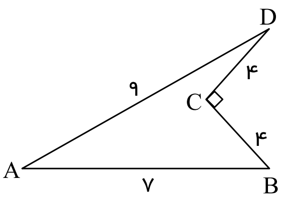
① $۸\sqrt{۳}$
② $\sqrt{۳}$
③ ۱۶
④ ۲۴

۴۸ - در شکل، $ABCD$ مستطیل است و نقاط M و N به فاصلهٔ ۱ واحد از هم روی AB حرکت می‌کنند. کمترین مقدار محیط ذوزنقهٔ $DCNM$ کدام است؟



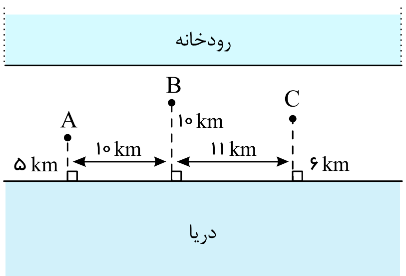
① ۳۰
② ۳۲
③ ۳۴
④ ۳۶

۴۹ - دور زمینی مطابق شکل حصارکشی شده است. با جابه‌جایی حصارهای BC و CD بدون آنکه طول آنها تغییر کند، مساحت زمین را افزایش می‌دهیم. مقدار مساحت زمین چقدر می‌شود؟



① $۸ + ۱۴\sqrt{۲}$
② $۱۴ + ۸\sqrt{۲}$
③ $۱۶ + ۱۴\sqrt{۲}$
④ $۱۴ + ۱۶\sqrt{۲}$

۵۰ - مطابق شکل، رودخانه‌ای موازی با قسمتی از ساحل یک دریا و به فاصلهٔ ۱۴ کیلومتر از آن قرار دارد. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا باشد و در ادامه جاده‌ای از B به C بسازیم به طوری‌که ۲ کیلومتر آن در ساحل رودخانه باشد. با توجه به اندازه‌های روی شکل، کمترین طول این جاده که از A به B و سپس به C می‌رود، چند کیلومتر است؟



① ۳۲
② ۳۴
③ ۳۶
④ ۳۸

فصل سوم : روابط طولی در مثلث

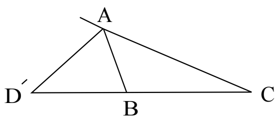
۵۱ - در مثلث قائم الزاویه ABC، $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز زاویه‌ی A برابر ۱۲ و ۵ هستند. طول قطعه بزرگ ایجاد شده بر روی کوچکترین ضلع توسط نیمساز زاویه نظیر آن کدام است؟

① ۳٫۶ ② ۳٫۴ ③ ۳٫۲ ④ ۳

۵۲ - در مثلثی $\widehat{A}=۲\widehat{B}$ و $a=\frac{۶}{۵}b$ است، مقدار $\tan\widehat{B}$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۴}$ ② $\frac{۴}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۵}$

۵۳ - در شکل زیر، نیمساز خارجی رأس A امتداد ضلع BC را در D' قطع می‌کند. اگر $AB=۴$ و $AC=۱۲$ ، آن‌گاه مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABD' است؟

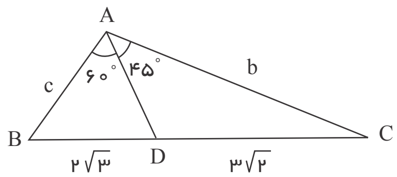


① ۳ ② ۲ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۱

۵۴ - در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم. در چهارضلعی حاصل طول یک ضلع برابر ۴ و یک زاویه ۱۲۰° است. مساحت ذوزنقه چقدر است؟

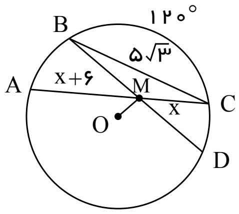
① $۲\sqrt{۳}$ ② $۴\sqrt{۳}$ ③ $۸\sqrt{۳}$ ④ $۱۶\sqrt{۳}$

۵۵ - در شکل مقابل نسبت $\frac{b}{c}$ کدام است؟



① $\frac{۴}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

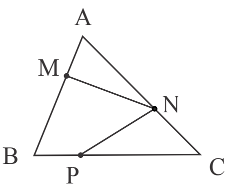
۵۶ - در شکل مقابل $\widehat{BC}=۱۲۰^\circ$ و $BC=۵\sqrt{۳}$ و $OM=۳$ است. مقدار x کدام است؟ (O مرکز دایره است)



① ۳ ② ۲ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۱

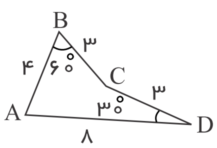
۵۷ - در شکل روبه‌رو $\frac{AM}{AB}=\frac{BP}{PC}=\frac{۱}{۴}$ و $AN=NC$.

نسبت مساحت $MNPB$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



① $\frac{۲۷}{۴۰}$ ② $\frac{۱۹}{۴۰}$ ③ $\frac{۱۳}{۴۰}$ ④ $\frac{۹}{۲۰}$

۵۸ - مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



① $۹+\sqrt{۳}$ ② $۶+\sqrt{۳}$ ③ $۶+۳\sqrt{۳}$ ④ $۹+۳\sqrt{۳}$

۵۹ - در مثلث ABC ، $m_b = \frac{9}{2}$ و $m_c = \frac{15}{2}$ و زاویهٔ بین m_b و m_c برابر با 120° است. ارتفاع h_a کدام است؟

(۱) $\frac{45\sqrt{3}}{14}$ (۲) $\frac{15\sqrt{3}}{14}$ (۳) $\frac{45\sqrt{3}}{7}$ (۴) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

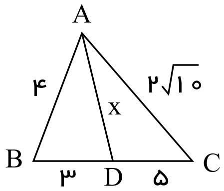
۶۰ - در مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۷ و ۸، از محل همرسی میانه‌ها پاره‌خطی موازی ضلع بزرگتر رسم می‌کنیم. مساحت بزرگترین ذوزنقهٔ حاصل کدام است؟

(۱) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{10}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

۶۱ - در مثلث ABC با طول اضلاع ۲ و ۵ و ۶، نسبت شعاع دایرهٔ محاطی داخلی به شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{39}}{20}$ (۲) $\frac{9}{20}$ (۳) $\frac{9}{40}$ (۴) $\frac{\sqrt{39}}{40}$

۶۲ - در شکل مقابل طول x کدام است؟



(۱) $\sqrt{18}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{15}$

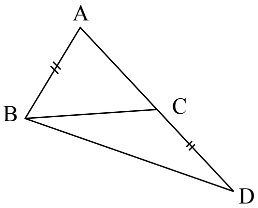
۶۳ - در متوازی‌الاضلاعی، طول دو قطر به طول‌های ۱۲ و ۸ و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۶۴ - در مثلث ABC رابطهٔ $a^2\cos^2\widehat{B} + b^2\sin^2\widehat{A} = k^2$ برقرار است. اندازه‌ی ضلع a کدام است؟

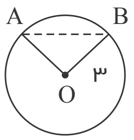
(۱) $\sqrt{k}$ (۲) k (۳) $\frac{k}{2}$ (۴) $2k$

۶۵ - در شکل مقابل کدام گزینه همواره صحیح است؟ $(AB = CD)$



(۱) $BC > AB$ (۲) $AC > AB$ (۳) $BD > AC$ (۴) $BD > BC$

۶۶ - در شکل زیر، شعاع دایره برابر ۳ و طول کمان بزرگتر AB ، برابر با 4π است. محیط چندضلعی منتظمی که AB ضلع آن است کدام مورد است؟

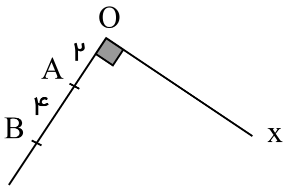


(۱) ۹ (۲) $9\sqrt{3}$ (۳) $12\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

۶۷ - مساحت مثلثی با دو ضلع ۵ و ۴ واحد، برابر $5\sqrt{3}$ است. اگر تمام زوایای مثلث حاده باشند، ضلع متوسط این مثلث کدام است؟

(۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{21}$ (۳) $\sqrt{17}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۶۸ - دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر Ox مماس بوده و از A و B بگذرد. اگر T نقطه‌ی تماس دایره با Ox باشد، زاویهٔ $A\widehat{T}B$ کدام است؟

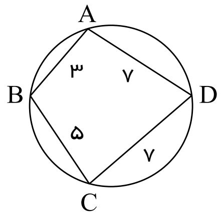


(۱) 60°
(۲) 30°
(۳) 45°
(۴) 15°

۶۹ - در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D روی ضلع BC به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ D از نزدیک‌ترین ضلع مثلث ABC به آن (به‌جز BC)، چند برابر فاصلهٔ آن از دورترین ضلع مثلث است؟

(۱) ۰٫۳ (۲) ۰٫۴ (۳) ۰٫۶ (۴) ۰٫۸

۷۰ - در شکل مقابل، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



① $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ② $\frac{۷\sqrt{۳}}{۳}$

③ $\frac{۱۴\sqrt{۳}}{۳}$ ④ $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

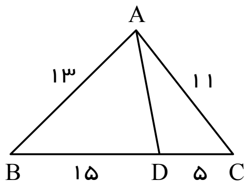
۷۱ - در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۴$، $AC = ۵$ و $BC = ۷$، نیمساز زاویهٔ داخلی A، میانهٔ CM را در نقطهٔ I قطع می‌کند. طول پاره‌خط MI کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۳۳}}{۵}$ ② $\frac{\sqrt{۳۳}}{۷}$ ③ $\frac{۲\sqrt{۳۳}}{۵}$ ④ $\frac{۲\sqrt{۳۳}}{۷}$

۷۲ - در مثلث ABC، $b\cos\hat{C} = c\sin\hat{B}$ و $\hat{A} = ۱۳۰^\circ$ است. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث کدام است؟

① ۵° ② ۱۰° ③ ۱۵° ④ ۲۰°

۷۳ - در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ D از ضلع AC کدام است؟



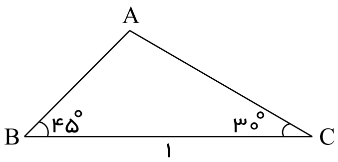
① ۱٫۵ ② ۲

③ ۲٫۵ ④ ۳

۷۴ - در مثلث ABC به اضلاع ۶،۵ و ۷ واحد، اگر G نقطهٔ همرسی میانه‌ها باشد،مساحت مثلث AGC کدام است؟

① $\sqrt{۶}$ ② $۲\sqrt{۳}$ ③ $۲\sqrt{۶}$ ④ $۳\sqrt{۳}$

۷۵ - در مثلث ABC که در آن $BC = ۱$، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

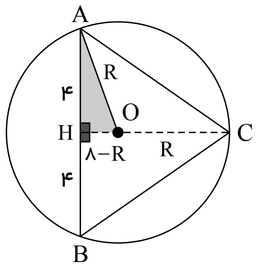


① $\sqrt{۲} - ۱$ ② $\sqrt{۳} - ۱$

③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ④ $\sqrt{۶} - \sqrt{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ با توجه به ثابت بودن طول AB مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ زمانی حداکثر مقدار ممکن می‌شود که ارتفاع وارد از رأس به ضلع AB حداکثر مقدار ممکن باشد. پس ارتفاع CH در راستای قطر عمود بر AB است و عمودمنصف آن نیز می‌باشد.



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}CH \times AB \to ۳۲ = \frac{۱}{۲}CH \times ۸ \to CH = ۸ \to OH = CH - CO = ۸ - R$$

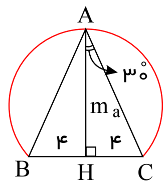
$$\overset{\Delta}{AOH} : ۴^۲ + (۸-R)^۲ = R^۲ \to ۱۶ + ۶۴ - ۱۶R + \cancel{R^۲} = \cancel{R^۲} \to ۸۰ = ۱۶R \to R = ۵$$

قطر دایره $= ۲R = ۲ \times ۵ = ۱۰$

۲ - گزینه ۴ بیشترین مقدار m_a هنگامی رخ می‌دهد که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد $(AB = AC)$. با توجه به شکل داریم:

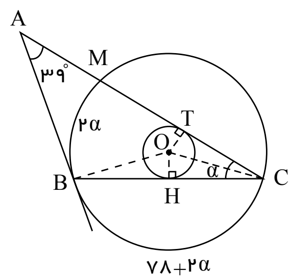
$$\overset{\Delta}{AHC} : \tan ۳۰^\circ = \frac{۴}{\max(m_a)} \Rightarrow \max(m_a) = ۴\sqrt{۳}$$

$$\hat{A} = \frac{\pi}{۳} < ۹۰^\circ \Rightarrow m_a > \frac{a}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴ \Rightarrow m_a > ۴$$



بنابراین $۶/۸ \approx ۴\sqrt{۳} \geq m_a > ۴$ می‌باشد، درنتیجه گزینهٔ (۴) در بازهٔ فوق قرار دارد و مثلث منحصربه‌فردی قابل رسم است.

۳ - گزینه ۳



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BM}}{۲}\,,\quad \underset{\text{محاطی}}{C} = \alpha = \frac{\overset{\frown}{BM}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = ۲\alpha$$

$$۳۹^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC} - ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۷۸^\circ + ۲\alpha$$

$$\hat{T} = \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow O\hat{C}T = O\hat{C}H = \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow H\hat{O}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{\alpha}}{۲}$$

مرکزی $B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} = ۷۸^\circ + ۲\alpha\,,\ B\hat{O}C = ۲H\hat{O}C = ۲(۹۰^\circ - \frac{\hat{\alpha}}{۲})$

$$= ۱۸۰^\circ - \alpha$$

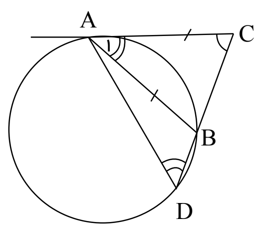
$$\Rightarrow ۷۸^\circ + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۱۸۰^\circ - ۷۸^\circ = ۱۰۲^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۰۲^\circ}{۳} = ۳۴^\circ$$

۴ - گزینه ۴

در مثلث ABC و ADC باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{ظلی})\hat{A}_۱ = (\text{محاطی})\hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ACB} \simeq \overset{\Delta}{DCA} \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DA} = \frac{BC}{CA}$$

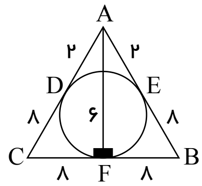
$$\xrightarrow{AB=AC} DC = DA$$



۵ - گزینه ۲ می‌دانیم دو مماس رسم شده از هر نقطه خارج دایره برابرند. بنابراین:

$AE = AD = ۲$

$CF = CD = ۸$



از آن‌جا که مثلث متساوی‌الساقین است. داریم:

$$AC = AB \rightarrow ۱۰ = ۲ + BE \rightarrow BE = ۸$$

$$BF = BE = ۸\ ,\ AF = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

نصف محیط $= P = \dfrac{۱۰ + ۱۰ + ۱۶}{۲} = ۱۸$

$$S = \frac{۱}{۲} AF \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۶ = ۴۸$$

شعاع دایرهٔ محاطی: $r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{۴۸}{۱۸} = \dfrac{۸}{۳}$

۶ - گزینه ۳ می‌دانیم مجموع کمان‌های دایره ۳۶۰ درجه است. با توجه به فرض داریم:

$$\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BT} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۵\overset{\frown}{BT} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BT} = ۷۲^\circ$$

$$\overset{\frown}{TC} = ۲\overset{\frown}{TB} = ۲ \times ۷۲^\circ = ۱۴۴^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{BT} = ۷۲^\circ} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{TC} - \overset{\frown}{BT}}{۲} = \frac{۱۴۴^\circ - ۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

۷ - گزینه ۴

طول ضلع نه‌ضلعی منتظم محاطی : $a = ۲R \sin \dfrac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۹\ ,\ R=۵} a = ۱۰ \sin ۲۰^\circ$

طول ضلع نه‌ضلعی منتظم محیطی : $b = ۲R \tan \dfrac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۹\ ,\ R=۵} b = ۱۰ \tan ۲۰^\circ$

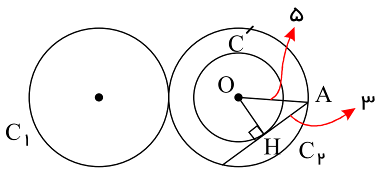
هر دو نه‌ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{b}\right)^۲ = \left(\frac{۱۰ \sin ۲۰^\circ}{۱۰ \tan ۲۰^\circ}\right)^۲ = \cos^۲ ۲۰^\circ$$

۸ - گزینه ۳ در مثلث OAH داریم:

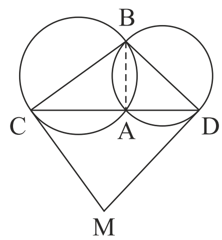
$$\overset{\triangle}{OAH}\ : \hat{H} = ۹۰^\circ\ ,\ OA = ۵\ ,\ AH = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$



پس وتر مورد نظر به طول ۶ در دایرهٔ $C_۲$ قابل رسم است و بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ مماس است. دو دایرهٔ $C_۱$ و C' متخارج هستند پس دارای ۴ مماس مشترکند. قطعه‌ای که داخل $C_۲$ قرار دارد و بر C' مماس است وتری به طول ۶ می‌باشد.

۹ - گزینه ۱



$$\begin{cases} D\hat{C}M \text{ زاویه‌ی ظلی} \\ A\hat{B}C \text{ زاویه‌ی محاطی} \end{cases} \Rightarrow D\hat{C}M = A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

$$\begin{cases} C\hat{D}M \text{ زاویه‌ی ظلی} \\ A\hat{B}D \text{ زاویه‌ی محاطی} \end{cases} \Rightarrow C\hat{D}M = A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

$$\Rightarrow D\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}A = M\hat{D}C + M\hat{C}D \qquad (۱)$$

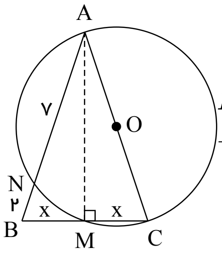
$$\overset{\triangle}{MCD}\ : M\hat{C}D + M\hat{D}C + C\hat{M}D = ۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} D\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - C\hat{M}D$$

پس این دو زاویه‌ی روبه‌رو، در چهارضلعی $BCMD$ مکمل یکدیگرند، در نتیجه دو زاویه‌ی دیگر هم مکمل‌اند که نشان می‌دهد $BCMD$ چهارضلعی محاطی است.

باتوجه به نامساوی‌های داده شده $CB+DM>CM+DB$ است و چهارضلعی قطعاً محیطی نیست.

۱۰ ـ گزینه ۳

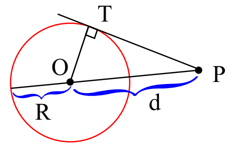


پاره‌خط AM را رسم می‌کنیم چون زاویه‌ی $A\hat{M}C$ روبه‌رو به قطر است، قائمه می‌باشد و چون در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز هست پس $BM=MC$ می‌باشد بنابر رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$BM\times BC=BN\times AB\rightarrow x\times(۲x)=۲\times ۹\rightarrow x^۲=۹$$
$$\rightarrow x=۳\rightarrow BC=۲x=۶$$

۱۱ ـ گزینه ۲

مطابق شکل و فرض سؤال داریم:

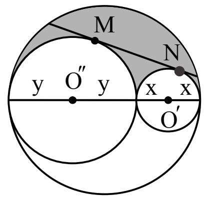


$$\begin{cases} d+R=۹ \\ d=\frac{۱۳}{۲} \end{cases}\Rightarrow R=۹-\frac{۱۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow PT=\sqrt{PO^۲-OT^۲}=\sqrt{d^۲-R^۲}=\sqrt{\frac{۱۶۹}{۴}-\frac{۲۵}{۴}}=۶$$

۱۲ ـ گزینه ۱

می‌دانیم که طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس برون با شعاع‌های R و R' برابر $۲\sqrt{RR'}$ است.



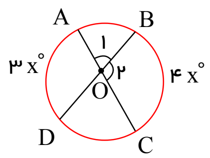
مطابق شکل شعاع‌های دو دایرهٔ داخلی را x و y می‌گیریم داریم:

$$\begin{cases} ۲R=۲(x+y)=۱۲\Rightarrow x+y=۶ \\ \text{مماس مشترک خارجی}\quad MN=۲\sqrt{xy}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow xy=۸ \end{cases}\Rightarrow x=۲,y=۴$$

$$\Rightarrow \text{مساحت قسمت هاشورزده}=\frac{۱}{۲}(\pi R^۲-\pi x^۲-\pi y^۲)=\frac{۱}{۲}(\pi\times ۳۶-\pi\times ۴-\pi\times ۱۶)=۸\pi$$

۱۳ ـ گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} \hat{O}_۲=\frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{۲}=\frac{۳x^\circ+۴x^\circ}{۲}=۳/۵x^\circ \\ O_۱=x^\circ \end{cases}$$

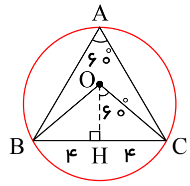
زوایای $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ مکمل هستند. پس:

$$\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\rightarrow ۴/۵x^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۴۰$$

۱۴ ـ گزینه ۳

چون $\hat{A}=۶۰^\circ$ پس، $\widehat{BC}=۱۲۰^\circ$ است.از طرفی عمود OH نیمساز زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}C$ نیز هست. در نتیجه داریم:

$$O\overset{\Delta}{H}C:\tan\hat{O}=\frac{HC}{OH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۱}=\frac{۴}{OH}\Rightarrow OH=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

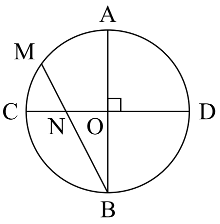


۱۵ ـ گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویه NOB طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$ON=\sqrt{۴^۲-۳^۲}=\sqrt{۷}$$

برای نقطهٔ N (برخورد قطر CD و وتر BM) روابط طولی دایره را می‌نویسیم:

$$BN\cdot NM=CN\cdot ND\Rightarrow ۴\times MN=(۳-\sqrt{۷})(۳+\sqrt{۷})=۹-۷=۲\Rightarrow MN=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$



۱۶ - گزینه ۳

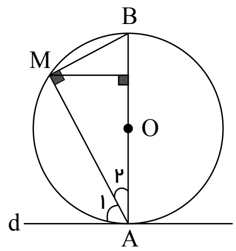
$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳a}{۲}-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S = \pi r_a^۲ = \pi(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)^۲ = \frac{۳}{۴}\pi a^۲ = ۲۷\pi \rightarrow a = ۶$$

در نتیجه محیط برابر است با:

محیط $: ۳a = ۳ \times ۶ = ۱۸$

۱۷ - گزینه ۲



محاطی $A\hat{B}M = \frac{\widehat{AM}}{۲} \rightarrow \widehat{AM} = ۲A\hat{B}M = ۲(۵\alpha - ۲۵^\circ) \rightarrow \widehat{AM} = ۱۰\alpha - ۵۰^\circ$

ظلی $\hat{A}_۱ = \frac{\widehat{AM}}{۲} \rightarrow ۳\alpha + ۱۵^\circ = \frac{۱۰\alpha - ۵۰^\circ}{۲}$

$$\rightarrow ۶\alpha + ۳۰^\circ = ۱۰\alpha - ۵۰^\circ \rightarrow ۸۰^\circ = ۴\alpha \rightarrow \alpha = ۲۰^\circ \rightarrow \hat{A}_۱ = ۳ \times ۲۰^\circ + ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$$

$$\rightarrow \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ - \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۵^\circ$$

AMB ارتفاع روبه‌رو به ۱۵° در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AH = \frac{AB}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$

۱۸ - گزینه ۲ هر مثلث یک دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی دارد.

طبق روابط زیر: (s مساحت مثلث و p نصف محیط آن است.)

شعاع دایره محاطی داخلی $r = \frac{s}{p}$

A شعاع دایره محاطی خارجی راس $r_a = \frac{s}{p-a}$

B شعاع دایره محاطی خارجی راس $r_b = \frac{s}{p-b}$

C شعاع دایره محاطی خارجی راس $r_c = \frac{s}{p-c}$

می‌توان نتیجه گرفت که:

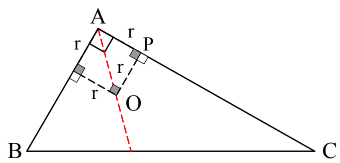
$$a > b > c \Rightarrow p > p-c > p-b > p-a \Rightarrow \frac{s}{p} < \frac{s}{p-c} < \frac{s}{p-b} < \frac{s}{p-a}$$

$$\Rightarrow r < r_c < r_b < r_a$$

برای مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$، بزرگ‌ترین دایره محاطی، دایره محاطی خارجی رأس قائمه باشد، زیرا وتر بزرگ‌ترین ضلع است. داریم: $r = ۱$ و $r_a = ۶$.

از طرفی می‌دانیم که شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: $r = p - a$

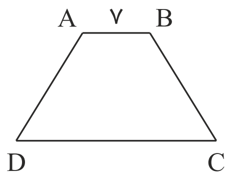
$$r = AP = AQ = p - a$$



$$\Rightarrow r_a = ۶ \Rightarrow \frac{s}{p-a} = ۶ \Rightarrow \frac{s}{۱} = ۶ \Rightarrow s = ۶ \text{ و } r = \frac{s}{p} = ۱ \Rightarrow s = p = ۶$$

$\Rightarrow p - a = ۱$ و $p = ۶ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow$ شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه = نصف وتر $= \frac{۵}{۲} = ۲/۵$

۱۹ - گزینه ۳ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ محیطی است. داریم:



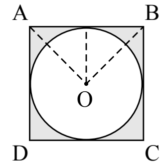
$$AB+CD=AD+BC=\frac{۳۲}{۲}=۱۶$$

$$۷+CD=۱۶\Rightarrow CD=۹$$

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AD=BC\Rightarrow ۲AD=۲BC=۱۶\Rightarrow AD=BC=۸$

۲۰ - گزینه ۴ با معلوم بودن محیط دایره، مقدار شعاع محاسبه می‌شود:

محیط دایره محاطی $=۲\pi R\Rightarrow ۱۲/۵۶=۲\pi R$



$$\Rightarrow R=\frac{۱۲/۵۶}{۶/۲۸}=۲\Rightarrow S_{\text{دایره}}=\pi\times R^۲=۳/۱۴\times ۴=۱۲/۵۶$$

در هر چهارضلعی محیطی داریم: $R=\frac{S}{P}$ که در آن P نصف محیط است.

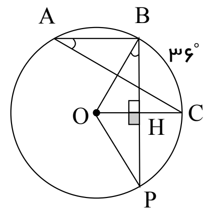
از طرفی محیط چندضلعیِ محیطی دو برابر مجموع اضلاع غیر مجاور است پس $۱۸=\frac{۲\times ۱۸}{۲}=P$ و داریم:

$$R=\frac{S}{P}\Rightarrow ۲=\frac{S}{۱۸}\Rightarrow S=۱۸\times ۲=۳۶$$

$$\Rightarrow \text{مساحت قسمت هاشورخورده}\quad S=S_{ABCD}-S_{\text{دایره}}=۳۶-۱۲/۵۶=۲۳/۴۴$$

۲۱ - گزینه ۳

مطابق فرض داریم:



محاطی $B\widehat{A}C=۱۸^\circ\Rightarrow \widehat{BC}=۲B\widehat{A}C=۳۶^\circ$

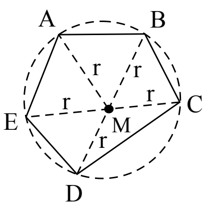
مرکزی $\widehat{O}=\widehat{BC}=۳۶^\circ\Rightarrow O\widehat{B}H=۹۰^\circ-\widehat{O}=۹۰^\circ-۳۶^\circ=۵۴^\circ$

از طرفی چون OC شعاع عمود بر وتر PB است پس داریم:

$$BH=PH\ ,\ H=۹۰^\circ\ ,\ OH\ \text{مشترک}\ \Rightarrow \overset{\Delta}{OHB}\cong\overset{\Delta}{OPH}$$

$$\Rightarrow O\hat{P}H=\hat{B}=۵۴^\circ$$

۲۲ - گزینه ۴



چند ضلعی که عمودمنصف‌های اضلاعش در یک نقطه(M) همرس باشند، محاطی می‌باشد و نقطهٔ M مرکز دایره‌ای است که از همهٔ راس‌ها می‌گذرد. بنابراین فاصلهٔ M از همهٔ راس‌ها یکسان است یعنی: $\frac{AM}{CM}=۱$

۲۳ - گزینه ۳ مطابق شکل داریم :

$$OM=OH=OK=r$$

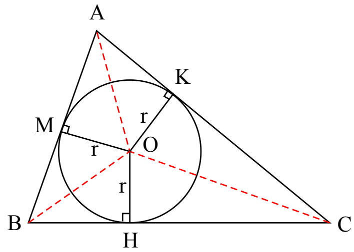
از طرفی داریم:

$$(BH+BM)+(AM+AK)+(CK+CH)=۲P$$

$$۲(AK+CK)+۲BH=۲P\Rightarrow BH=BM=p-b$$

پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH داریم:

$OB^۲ = r^۲ + BH^۲ = r^۲ + (p-b)^۲$



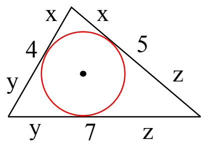
به همین ترتیب داریم:

$$\begin{cases} OC^۲ = r^۲ + (p-c)^۲ \\ OA^۲ = r^۲ + (p-a)^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ = ۳r^۲ + (p-a)^۲ + (p-b)^۲ + (p-c)^۲$$

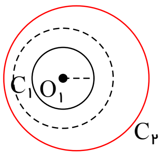
۲۴ - گزینه ۳

[خطای پردازش ریاضی]



۲۵ - گزینه ۴ مکان هندسی نقاطی که از آن دایره $C_۱$ به زاویهٔ قائمه دیده شوند دایره‌ای است به همان مرکز و به شعاع $\sqrt{۲}R_۱$. پس باید نقطهٔ موردنظر روی دایره‌ای باشد که مرکزش $O_۱$ و شعاعش $۲\sqrt{۲}$ است.

دایرهٔ نقطه‌چین داخل دایره $C_۲$ واقع می‌شود زیرا $۴ > ۱ + ۲\sqrt{۲}$، پس هیچ نقطهٔ تلاقی با دایرهٔ $C_۲$ ندارد.



۲۶ - گزینه ۳ نتیجهٔ ترکیب چند انتقال، یک انتقال است که بردار انتقال برابر با مجموع بردارهای انتقال است.

۲۷ - گزینه ۴ بازتاب نسبت به نقطه و تجانس هر دو شیب خط را حفظ می‌کند، پس ترکیب آن‌ها شیب خط را حفظ می‌کند. بازتاب نسبت به نقطه ایزومتری است ولی تجانس ایزومتری نیست، پس ترکیب آن‌ها ایزومتری نیست و مطلوب مسأله است.

۲۸ - گزینه ۱ ضابطهٔ دوران حول مبدأ و به زاویهٔ $\alpha = \frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی به‌صورت زیر است:

$$(x, y) \xrightarrow{\alpha = \frac{۳\pi}{۲}} (y, -x)$$

تصویر مرکز دایره $O(-۲, ۳) \to O'(۳, ۲)$ مرکز دایره

همچنین در دوران که یک تبدیل ایزومتریست، شعاع دایره ثابت می‌ماند، پس:

$$R' = R = \frac{۵}{۲}$$

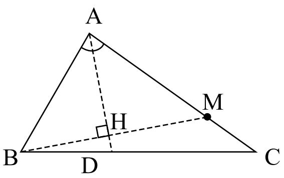
طول مماس مشترک داخلی دو دایره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

خط المرکزین : $\Rightarrow OO' = \sqrt{(۳-(-۲))^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۲۵+۱} = \sqrt{۲۶}$

طول مماس مشترک داخلی : $TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۲۶ - (\frac{۵}{۲} + \frac{۵}{۲})^۲} = \sqrt{۲۶ - ۲۵} = ۱$

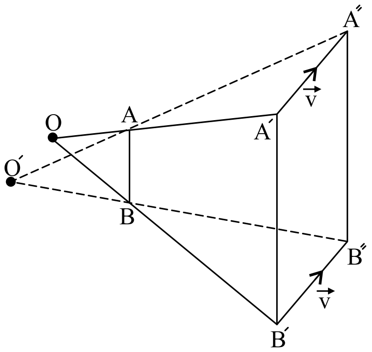
۲۹ - گزینه ۱

مطابق شکل، نیمساز AD را رسم می‌کنیم. از رأس B عمود BH را بر آن رسم کرده و ادامه می‌دهیم تا AC را در نقطهٔ M قطع کند. در مثلث ABM، AH ارتفاع و نیمساز است. پس مثلث ABM، متساوی‌الساقین است ($AB = AM$). بنابراین، نیمساز AD محور بازتاب می‌باشد.



۳۰ - گزینه ۱ مطابق شکل $A'B'$ مجانس AB به مرکز O و نسبت تجانس K است و $A''B''$ انتقال یافته $A'B'$ تحت بردار $\vec{v}$ است، داریم:

$$\begin{cases} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad (۱) \\ A''B'' = A'B' \ , \ AB || A'B' || A''B'' \end{cases}$$



مطابق شکل، فرض می‌کنیم که امتدادهای AA'' و BB'' در نقطهٔ O' متقاطع باشند. داریم:

$$O'\overset{\Delta}{A''}B'' \;:\; AB||A''B'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'A''}{O'A}=\frac{O'B''}{O'B}=\frac{A''B''}{AB} \overset{A''B''=A'B'}{=} k$$

$$\Rightarrow \frac{O'A''}{O'A}=\frac{O'B''}{O'B}=k \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AA''}{O'A}=\frac{BB''}{O'B}=k-۱ \quad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB}=k-۱ \xrightarrow{(۲)} \begin{cases} \dfrac{AA''}{O'A}=\frac{AA'}{OA} \\ \dfrac{BB''}{O'B}=\dfrac{BB'}{OB} \end{cases} \quad (۳)$$

بنابر روابط (۳) داریم:

$$\begin{cases} O\overset{\Delta}{O'}A \sim A\overset{\Delta}{A'}A'' \\ O\overset{\Delta}{O'}B \sim B\overset{\Delta}{B'}B'' \end{cases} \Rightarrow \frac{OO'}{A'A''}=\frac{OO'}{B'B''}=\frac{۱}{k-۱} \quad (۴)$$

طبق شکل : $A'A''=B'B''=|\vec{v}| \xrightarrow{(۴)} OO'=\dfrac{۱}{k-۱}|\vec{v}|$

درنتیجه OO' موازی بردار $\vec{v}$ و اندازه‌اش مقدار ثابت $\dfrac{|\vec{v}|}{k-۱}$ است، پس مکان نقطهٔ O' در صفحه مشخّص است و ترکیب اصلی مورد نظر، یک تجانس به نسبت k و مرکز O' است.

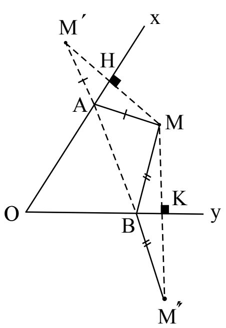
۳۱ - گزینه ۴ می‌توان با محور OK، مثلث OAB را بازتاب کرد و $O\overset{\Delta}{M}N$ را به‌دست آورد و از آنجا که داریم: $\dfrac{OC}{OM}=\dfrac{OD}{ON}=۲$ پس $O\overset{\Delta}{C}D$ مجانس $O\overset{\Delta}{M}N$ است.پس ترکیب بازتاب محوری و تجانس پاسخ مسأله است. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} OA=OM \;,\; A\hat{O}M=۹۰^\circ \\ OB=ON \;,\; B\hat{O}N=۹۰^\circ \end{cases}$$

پس مثلث OMN دوران‌یافتهٔ OAB به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° است. در ادامه $O\overset{\Delta}{C}D$ مجانس $O\overset{\Delta}{M}N$ است، پس پاسخ ترکیب دوران و تجانس می‌باشد.

۳۲ - گزینه ۳

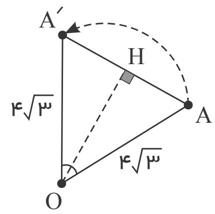
مطابق شکل، بازتاب M نسبت به Oox و Oy به‌ترتیب M' و M'' می‌باشند.



$M'M''$ اضلاع زاویه را در A و B قطع می‌کند. محیط $M\overset{\Delta}{A}B$ کمترین مقدار ممکن می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} MA=AM' \\ MB=M''B \end{cases} \Rightarrow MA+MB+AB=M'A+M''B+AB=M'M''$$

۳۳ - گزینه ۲



$$\begin{cases} OA = OA' = ۴\sqrt{۳} \\ A\hat{O}A' = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOA'} \text{ متساوی‌الاضلاع } \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$$

$$\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = ۶$$

۳۴ - گزینه ۴ گزینه ۱: عکس گزینه: اگر تبدیلی اندازه زوایا را حفظ کند آن‌گاه طولپاست (نادرست). تجانس تبدیلی است که اندازه زوایا را حفظ می‌کند اما طولپا نیست.

گزینه ۲: عکس گزینه: اگر تبدیلی از نوع بازتاب نباشد، آن‌گاه شیب خطوط را حفظ می‌کند (نادرست).

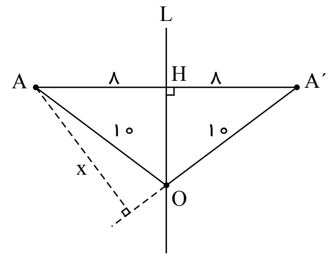
دوران از نوع بازتاب نیست اما شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

گزینه ۳: عکس گزینه: اگر دو شکل متشابه باشند، آن‌گاه متجانس هستند (نادرست).

می‌توان دو شکل متشابه رسم کرد که اضلاع آن دوبه دو موازی نباشند و از وصل کردن نقاط نظیر دو شکل، خطوطی همرسی بوجود نیاید.

گزینه ۴: (درست) تعریف تبدیل همانی بر این گزینه و عکس آن منطبق است.

۳۵ - گزینه ۴ طبق ویژگی‌های بازتاب داریم:



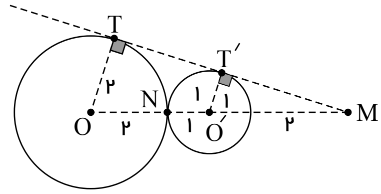
$$AH = A'H = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \text{ و } OA = OA' = ۱۰$$

$$OH^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ \Rightarrow OH = ۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{AOA'}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۶ = \frac{۱}{۲} \times x \times ۱۰ \Rightarrow x = ۹/۶$$

۳۶ - گزینه ۳ می‌دانیم که دو دایره می‌توانند با تجانس مستقیم به مرکز M (محل همرسی خط‌المرکزین و مماس مشترک‌های خارجی)

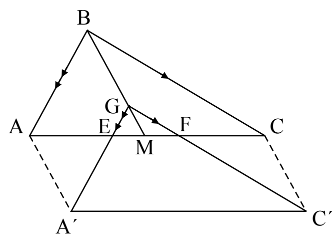
به هم تصویر شوند. هم‌چنین با تجانس معکوس به مرکز (محل همرسی خط‌المرکزین و مماس مشترک‌های داخلی) به‌هم تصویر می‌شوند. داریم:



$$O'T' || OT \Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MO' = \frac{MO}{۲}, OO' = ۳$$

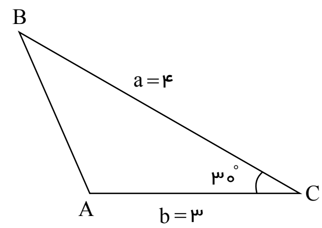
$$\Rightarrow MO' = OO' = ۳ \quad \Rightarrow \quad MN = ۳ + ۱ = ۴$$

۳۷ - گزینه ۴



$$\overset{\Delta}{EFG} \sim \overset{\Delta}{ABC}(\text{زز}) \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{EFG}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{GM}{BM})^۲ \rightarrow \frac{۶}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{۱}{۳})^۲ \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۵۴$$

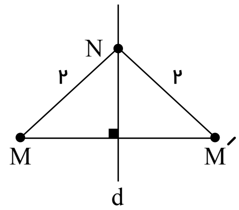
۳۸ - گزینه ۲ طبق فرض داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} \text{مساحت} : \quad S = \frac{۱}{۲}ab \cdot \sin\hat{C} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

$$\text{فرض}: S' = k^۲ \cdot S = ۱۲ \Rightarrow ۳k^۲ = ۱۲ \Rightarrow k^۲ = ۴ \Rightarrow k = \begin{cases} ۲ \\ -۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k = -۲$$

۳۹ - گزینه ۴



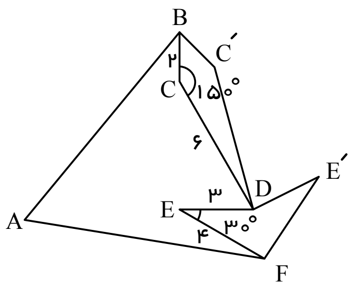
N روی عمودمنصف MM' (خط d) قرار دارد.

$\rightarrow MN' = NM = ۲$

صرف‌نظر از تغییر d، مجموعه نقاط M' از N به فاصلهٔ ۲هستند بنابراین روی یک دایره به مرکز N و شعاع ۲ (قطر ۴) قرار دارند.

۴۰ - گزینه ۲ ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب با زاویهٔ متقاطع θ معادل یک دوران است به مرکز محل تقاطع دو محور بازتاب و با زاویهٔ ۲θ. بنابراین این تبدیل شیب ضلع‌ها را تغییر می‌دهد در حالی که طول ضلع‌ها ثابت نگه می‌دارد و طولپاست.

۴۱ - گزینه ۲ بازتاب C را نسبت به BD نقطهٔ C' می‌نامیم و بازتاب E را نسبت به DF نقطهٔ E' می‌نامیم. در این‌صورت، محیط چندضلعی جدید مساوی محیط چندضلعی اولیه است، ولی مساحت چندضلعی جدید به اندازهٔ $۲S_{DEF} + ۲S_{BCD}$ افزایش می‌یابد.

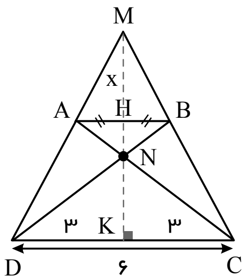


$$۲S_{DEF} = DE \times EF \sin ۳۰^\circ = ۳ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

$$۲S_{BCD} = BC \times CD \sin ۱۵۰^\circ = ۲ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

پس میزان افزایش مساحت نهایی برابر $۱۲ = ۶ + ۶$ است.

۴۲ - گزینه ۴ مطابق شکل داریم:



$$AB||CD \Rightarrow N\overset{\triangle}{A}B \sim N\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

درنتیجه، AB در تجانس معکوس به مرکز N و ضریب $k_۱ = -۲$ بر CD تصویر می‌شود. داریم:

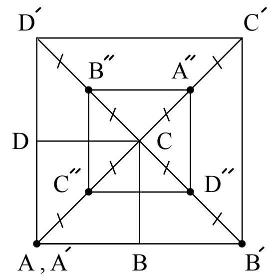
$$\frac{NH}{NK} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{NH}{۵ - NH} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow NH = \frac{۵}{۳}$$

$$AB||CD \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}B \sim M\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

درنتیجه، AB در تجانس مستقیم به مرکز M و ضریب $k_۲ = ۲$ بر CD تصویر می‌شود.

$$AB||CD \Rightarrow \frac{x}{x+۵} = \frac{AB}{CD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow MN = MH + NH = ۵ + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

۴۳ - گزینه ۳ شکل زیر را در نظر بگیرید:

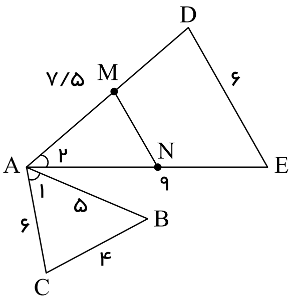


$$S_{A'B'C'D'} = ۴S_{ABCD}$$

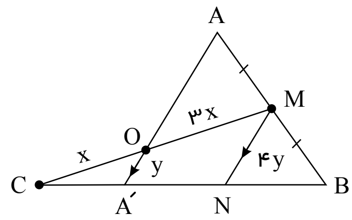
$$\frac{S_{A''B''C''D''} = S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'} - S_{A''B''C''D''}} = ۳S_{ABCD}$$

۴۴ - گزینه ۲ دو مثلث متشابه‌اند. زیرا: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۲}{۳}$

بنابراین، $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $B\hat{A}D = C\hat{A}E = \alpha$. درنتیجه، اگر دو نقطهٔ B و C را حول مرکز A و به زاویهٔ α دوران دهیم، دو نقطهٔ M و N به‌ترتیب منطبق بر دو ضلع AD و AE به‌دست می‌آید که مثلث AMN تصویر مثلث ABC است. همچنین این مثلث، تصویر مثلث ADE در یک تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{۲}{۳} = \frac{MN}{DE} = \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AE}$ می‌باشد.



۴۵ - گزینه ۲ ابتدا از نقطهٔ M خطی به موازات OA' رسم می‌کنیم تا پاره‌خط BC را در نقطهٔ N قطع کند. طبق فرض مسئله داریم:



$$\frac{OC}{OM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow OC=x\ ,\ OM=۳x\ ,\ CM=۴x$$

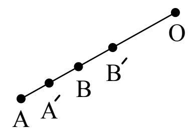
$$\overset{\Delta}{MNC}: MN||OA'\Rightarrow \frac{OA'}{MN}=\frac{OC}{CM}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \begin{cases}OA'=y\\ MN=۴y\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AA'B}: AA'||MN\Rightarrow \frac{MN}{AA'}=\frac{BM}{AB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{MN}{AA'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۴y}{OA+y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OA+y=۸y\Rightarrow OA=۷y$$

حال، طبق تعریف تجانس داریم:

$$|k|=\frac{OA'}{OA}=\frac{y}{۷y}=\frac{۱}{۷}\xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k=-\frac{۱}{۷}$$

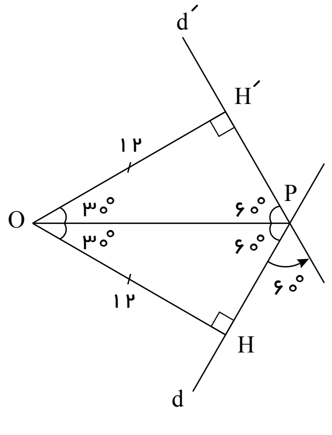
۴۶ - گزینه ۲ از آنجا که A' و B' به‌ترتیب، مجانس A و B به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $k=\frac{۴}{۵}$ است، داریم:



$$\frac{A'B'}{AB}=k=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \frac{A'B'}{۲۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow A'B'=۱۶$$

۴۷ - گزینه ۱

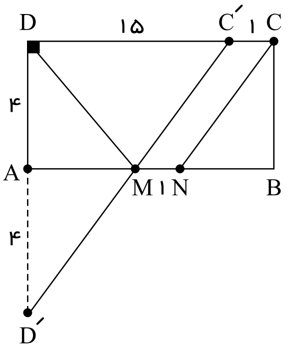
مطابق شکل با دوران خط d حول مرکز دوران O و به اندازهٔ ۶۰°، خط d' به‌دست می‌آید. در مثلث OHP، ضلع OH روبه‌روی زاویهٔ ۶۰° بوده، بنابراین داریم:



$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP\Rightarrow ۱۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP\Rightarrow OP=\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}=۸\sqrt{۳}$$

تذکر: از آنجا که تبدیل دوران، تبدیلی طولپاست $(OH'=OH)$، دو مثلث قائم‌الزاویه شکل فوق بنابر تساوی وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت‌اند.

۴۸ - گزینه ۳



برای پیدا کردن کمترین مقدار محیط ذوزنقه، C را با بردار $\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا C' به‌دست آید. سپس D را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا D' حاصل شود. محل تلاقی $C'D'$ با AB را M می‌نامیم و با بردار $\overrightarrow{C'C}$ انتقال می‌دهیم تا N ایجاد شود.

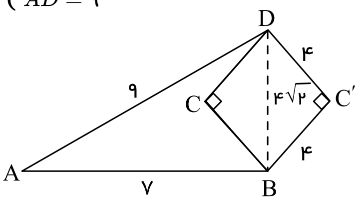
مسیر $DMNC$ کوتاهترین مسیر است و داریم:

$$\overset{\triangle}{DD'C'} : D'C'^{۲} = DD'^{۲} + DC'^{۲} = ۸^{۲} + ۱۵^{۲} = ۱۷^{۲} \Rightarrow D'C' = ۱۷$$

$$\text{محیط ذوزنقه } DCNM = DC + CN + MN + DM = ۱۶ + MC' + ۱ + D'M = ۱۷ + D'C' = ۱۷ + ۱۷ = ۳۴$$

۴۹ - گزینه ۱ طول وتر BD در مثلث قائم‌الزاویه BCD برابر $۴\sqrt{۲}$ می‌شود. رابطهٔ فیثاغورس بین اضلاع مثلث ABD برقرار است، پس این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است:

$$\begin{cases} AB = ۷ \\ BD = ۴\sqrt{۲} \to ۷^{۲} + (۴\sqrt{۲})^{۲} = ۸۱ = ۹^{۲} \\ AD = ۹ \end{cases}$$



با بازتاب نقطهٔ C نسبت به پاره‌خط BD، نقطهٔ C' را می‌یابیم؛ با این کار بدون تغییر در محیط چهارضلعی $ABCD$، مساحت آن را افزایش می‌دهیم. مقدار مساحت زمین $ABC'D$ برابر است با:

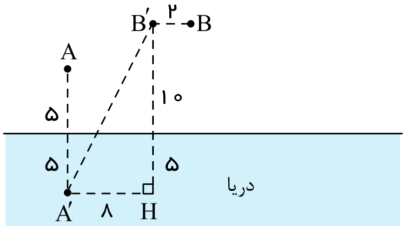
$$S_{ABC'D} = S_{ABD} + S_{BC'D} = \frac{۷ \times ۴\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۴ \times ۴}{۲} = ۱۴\sqrt{۲} + ۸$$

۵۰ - گزینه ۳

ابتدا B را ۲ کیلومتر به‌سمت چپ (و موازی ساحل دریا) انتقال می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را B' می‌نامیم. همچنین بازتاب A نسبت به ساحل دریا را نقطهٔ A' می‌نامیم. مطابق شکل مسیر $A'B'B$ کوتاه‌ترین جاده از A به B است که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا قرار دارد:

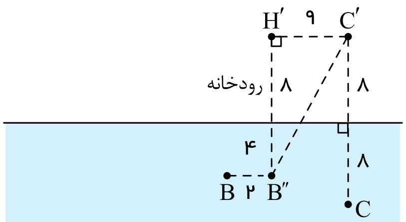
$$\overset{\triangle}{A'HB'} : \begin{cases} B'H = ۱۰ + ۵ = ۱۵ \\ A'H = ۱۰ - ۲ = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} A'B'^{۲} = ۱۵^{۲} + ۸^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow A'B' = ۱۷$$

طول مسیر $A'B'B$ برابر $۱۹ = ۲ + ۱۷$ کیلومتر است. مشابه همین کار را برای جادهٔ دوم بین B و C انجام می‌دهیم.



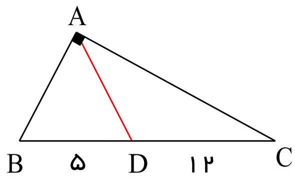
$$B''H'C' : \begin{cases} B''H' = ۴ + ۸ = ۱۲ \\ H'C' = ۱۱ - ۲ = ۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} B''C'^{۲} = ۹^{۲} + ۱۲^{۲} = ۲۲۵ \Rightarrow B''C' = ۱۵$$

طول مسیر $BB''C'$ برابر $۱۷ = ۲ + ۱۵$ کیلومتر است. در نتیجه طول جادهٔ موردنظر برابر $۳۶ = ۱۷ + ۱۹$ کیلومتر می‌شود.



۵۱ - گزینه ۲ سوال را طی دو مرحله حل می‌کنیم:

مرحله اول: طول اضلاع مثلث را بدست می‌آوریم:



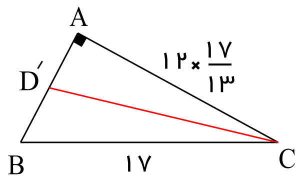
$$(\text{نیمساز})\ AD \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD}=\frac{۱۲}{۵}\Rightarrow \begin{cases} AC=۱۲x \\ AB=۵x \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}:\hat{A}=۹۰^{\circ}\Rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow (۱۲x)^{۲}+(۵x)^{۲}=۱۷^{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۷}{۱۳}$$

$$\Rightarrow AB=۵\times\frac{۱۷}{۱۳}, AC=۱۲\times\frac{۱۷}{۱۳}, BC=۱۷$$

مرحله دوم: کوچکترین ضلع AB است. باید طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز CD' را به دست آوریم.



$$(\text{نیمساز})\ CD'\Rightarrow \frac{AD'}{BD'}=\frac{AC}{BC}=\frac{۱۲\times\frac{۱۷}{۱۳}}{۱۷}=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow \begin{cases} AD'=۱۲y \\ BD'=۱۳y \end{cases}$$

$$AD'+BD'=AB\Rightarrow ۱۲y+۱۳y=۵\times\frac{۱۷}{۱۳}\Rightarrow y=\frac{۱۷}{۵\times ۱۳}$$

همانطور که می‌بینیم BD' قطعه بزرگ است. داریم:

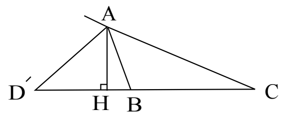
$$BD'=۱۳y=۱۳\times\frac{۱۷}{۵\times ۱۳}=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴$$

۵۲ - گزینه ۲ از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}\Rightarrow \frac{\sin ۲\widehat{B}}{\frac{۶}{۵}b}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}\Rightarrow \frac{۲\sin\hat{B}\cos\hat{B}}{\frac{۶}{۵}b}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}\Rightarrow ۲\cos\widehat{B}=\frac{۶}{۵}\Rightarrow \cos\widehat{B}=\frac{۳}{۵}$$

$$\text{داریم}:۱+\tan^{۲}\hat{B}=\frac{۱}{\cos^{۲}\hat{B}}\Rightarrow ۱+\tan^{۲}\hat{B}=\frac{۱}{\frac{۹}{۲۵}}\Rightarrow \tan^{۲}\hat{B}=\frac{۱۶}{۹}\xrightarrow{\sin\hat{B},\cos\hat{B}>۰}\tan\widehat{B}=\frac{۴}{۳}$$

۵۳ - گزینه ۲ می‌دانیم در هر مثلث، نیمساز خارجی نظیر هر رأس، امتداد ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کند. بنابراین داریم:

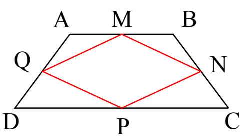


$$\frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{BD'}{CD'-BD'}=\frac{AB}{AC-AB}\Rightarrow \frac{BD'}{BC}=\frac{۴}{۸}\Rightarrow \frac{BC}{BD'}=۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AB}C}}{S_{\overset{\triangle}{AB}D'}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\cdot BC}{\frac{۱}{۲}AH\cdot BD'}=\frac{BC}{BD'}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AB}C}}{S_{\overset{\triangle}{AB}D'}}=۲$$

۵۴ - گزینه ۴ اگر اوساط اضلاع ذوزنقه متساوی‌الساقین را متوالیاً به هم وصل کنیم لوزی حاصل می‌شود که مساحت آن نصف مساحت ذوزنقه است.

مساحت لوزی برابر است با مربع یک ضلع در سینوس یکی از زوایا.



$$S_{MNPQ}=۴^{۲}\times\sin ۱۲۰^{\circ}=۱۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۸\sqrt{۳}$$

$$S_{ABCD}=۲\times ۸\sqrt{۳}=۱۶\sqrt{۳}$$

۵۵ - گزینه ۴ طبق قضیه سینوس‌ها در دو مثلث ABC و ACD داریم:

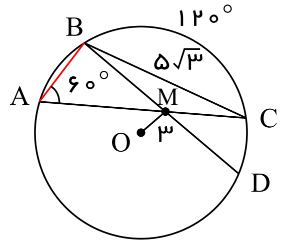
$$\begin{cases} \dfrac{۲\sqrt{۳}}{sin۶۰^{\circ}}=\dfrac{C}{sinA\hat{D}B}\Rightarrow C=۴sinA\hat{D}B \\ \dfrac{۳\sqrt{۲}}{sin۴۵^{\circ}}=\dfrac{b}{sinA\hat{D}C}\Rightarrow b=۶sinA\hat{D}C \end{cases}$$

می‌دانیم که دو زاویهٔ $A\hat{D}C$ و $A\hat{D}B$ مکمل هستند پس:

$$\sin A\hat{D}B=sinA\hat{D}C\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{۶\sin A\hat{D}C}{۴\sin A\hat{D}B}=\frac{۳}{۲}$$

۵۶ - گزینه ۲ در مثلث ABC داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}\ :\ \text{محاطی}\ \widehat{A}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ \Rightarrow R_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\sin ۶۰^\circ}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۵$$



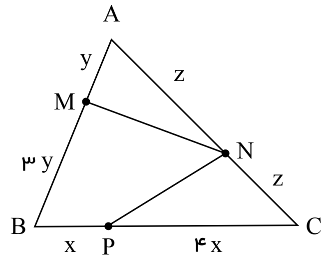
شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، شعاع دایره است.طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$R^{۲}-OM^{۲}=۵^{۲}-۳^{۲}=۱۶\Rightarrow AM\times MC=۱۶\Rightarrow x(x+۶)=۱۶\Rightarrow x=۲$$

۵۷ - گزینه ۲

باتوجه به فرض داریم:

$$\begin{cases}\frac{BP}{PC}=\frac{۱}{۴}\to\begin{cases}BP=x\\PC=۴x\end{cases}\\ \frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۴}\to\begin{cases}AM=y\\AB=۴y\end{cases}\\ AN=NC=z\end{cases}$$



$$\begin{cases}\dfrac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}y\cdot z\cdot\sin\hat{A}}{\frac{۱}{۲}۴y\cdot ۲z\cdot\sin\hat{A}}=\dfrac{۱}{۸}\\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\triangle}{PNC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}z\cdot ۴x\cdot\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}۲z\cdot ۵x\cdot\sin\hat{C}}=\dfrac{۲}{۵}\end{cases}$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{S_{ABC}-S_{AMN}-S_{PNC}}{S_{ABC}}=۱-\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}-\frac{S_{PNC}}{S_{ABC}}=۱-\frac{۱}{۸}-\frac{۲}{۵}=\frac{۱۹}{۴۰}$$

۵۸ - گزینه ۳ از A به C وصل می‌کنیم. داریم:

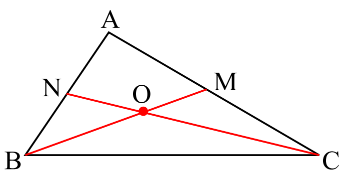
$$\begin{cases}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳\times\sin ۶۰^\circ=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\\ S_{\overset{\triangle}{ACD}}=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸\times\sin ۳۰^\circ=۱۲\times\frac{۱}{۲}=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{ACD}}=۶+۳\sqrt{۳}$$

۵۹ - گزینه ۱ نقطهٔ O محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است. داریم:

$$\overset{\triangle}{BOC}\ :\ B\widehat{O}C=۱۲۰^\circ\ ,\ OB=\frac{۲}{۳}m_b=\frac{۲}{۳}\times\frac{۹}{۲}=۳$$

$$OC=\frac{۲}{۳}m_c=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۵}{۲}=۵$$



در مثلث BOC با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$\overset{\triangle}{BOC}\ :\ BC^{۲}=OB^{۲}+OC^{۲}-۲OB\cdot OC\cdot\cos B\widehat{O}C$$

$$\Rightarrow BC^{۲}=۳^{۲}+۵^{۲}-۲\times ۳\times ۵\times\underbrace{\cos ۱۲۰^\circ}_{-\frac{۱}{۲}}$$

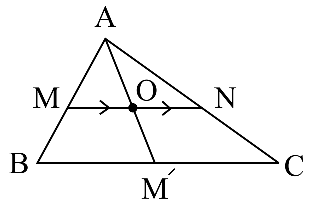
$$\Rightarrow BC^{۲}=۹+۲۵+۱۵=۴۹\Rightarrow BC=۷$$

$$S_{\overset{\triangle}{BOC}}=\frac{۱}{۲}\times OB\times OC\times\sin B\widehat{O}C=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۵\times\underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۳S_{\overset{\triangle}{BOC}}=۳\times\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۵\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۴۵\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۱}{۲}\times h_a\times BC=\frac{۱}{۲}\times h_a\times ۷\Rightarrow h_a=\frac{۴۵\sqrt{۳}}{۱۴}$$

۶۰ - **گزینه ۱** مطابق شکل نقطهٔ O محل همرسی میانه‌هاست. داریم:



$$MN\parallel BC\Rightarrow A\overset{\triangle}{M}N\sim A\overset{\triangle}{B}C$$

در مثلث AMN، AO میانه و در مثلث ABC هم AM' میانه است.

پس نسبت تشابه دو مثلث AMN و ABC، مربع نسبت میانه‌های نظیر است. داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{AO}{AM'})^۲\ ,\ \text{محل همرسی میانه‌ها } O\Rightarrow\frac{AO}{AM'}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\Rightarrow S_{MNCB}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AMN}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵}{۹}S_{ABC}\quad(۱)$$

با نوشتن دستور هرون داریم:

$$P_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۳+۷+۸}{۲}=۹\ ,\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\sqrt{۹\times(۹-۳)(۹-۷)(۹-۸)}=۶\sqrt{۳}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S_{MNCB}=\frac{۵}{۹}\times ۶\sqrt{۳}=\frac{۱۰}{۳}\times\sqrt{۳}=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$$

۶۱ - **گزینه ۳** طبق دستور هرون در مساحت داریم:

$$P=\frac{۲+۵+۶}{۲}=\frac{۱۳}{۲}\quad,\quad S=\sqrt{\frac{۱۳}{۲}\times(\frac{۱۳}{۲}-۲)(\frac{۱۳}{۲}-۵)(\frac{۱۳}{۲}-۶)}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۳۹}$$

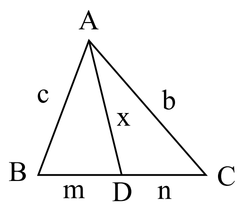
از طرفی داریم:

$$R=\frac{abc}{۴S}\ ,\ r=\frac{S}{p}$$

$$\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{۴S}}=\frac{۴S^۲}{pabc}=\frac{۴\times\frac{۹}{۱۶}\times ۳۹}{\frac{۱۳}{۲}\times ۲\times ۵\times ۶}=\frac{۹}{۴۰}$$

۶۲ - **گزینه ۳** با نوشتن رابطهٔ استوارت داریم:

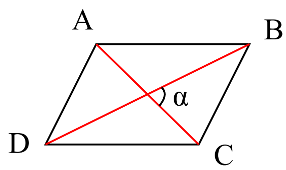
$$nc^۲+mb^۲=\underbrace{(m+n)}_{BC}(x^۲+mn)$$



$$\Rightarrow ۵\times ۴^۲+۳\times(۲\sqrt{۱۰})^۲=۸(x^۲+۱۵)$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=۸(x^۲+۱۵)\Rightarrow x^۲+۱۵=۲۵\Rightarrow x=\sqrt{۱۰}$$

۶۳ - **گزینه ۲** مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر،پس:



$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۲\times\underbrace{\sin ۱۳۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲۴\sqrt{۲}$$

۶۴ - گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$a^2(1-\sin^2\widehat{B})+b^2\sin\widehat{A}=k^2\Rightarrow a^2-a^2\sin^2\widehat{B}+b^2\sin^2\widehat{A}=k^2\quad(1)$$

$$\text{سینوس‌ها}: \frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}\Rightarrow a\sin\widehat{B}=b\sin\widehat{A}\Rightarrow a^2-b^2\sin^2 A+b^2\sin^2 A=k^2\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a^2=k^2\Rightarrow a=k$$

۶۵ - گزینه ۳ با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های ABC , BCD داریم:

$$\begin{cases}\overset{\triangle}{ABC}: AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos A\widehat{B}C\\ \overset{\triangle}{BCD}: BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\times\cos B\widehat{C}D\end{cases},\ AB=CD\ (1)$$

از طرفی داریم:

$$B\widehat{C}D>A\widehat{B}C\Rightarrow\cos B\widehat{C}D<\cos A\widehat{B}C\ (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow AC^2<BD^2\Rightarrow AC<BD$$

۶۶ - گزینه ۲ داریم:

$$\text{طول کمان } AB \text{ کوچک} = (2\pi\times 3) - \text{طول کمان } AB \text{ بزرگتر}$$

$$\Rightarrow \text{طول کمان } AB \text{ کوچک} = 6\pi-4\pi=2\pi$$

زاویهٔ مرکزی این کمان برابر است با:

$$A\widehat{O}B=\frac{2\pi}{6\pi}\times 360^\circ\Rightarrow A\widehat{O}B=120^\circ$$

با به کار بردن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث OAB داریم:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos A\widehat{O}B$$

$$\Rightarrow AB^2=3^2+3^2-2\times 3\times 3\times(-\frac{1}{2})\Rightarrow AB^2=27\Rightarrow AB=3\sqrt{3}$$

تعداد اضلاع این چندضلعی منتظم برابراست با:

$$\text{تعداد اضلاع}=\frac{360^\circ}{120^\circ}=3$$

محیط این مثلث متساوی‌الاضلاع برابر می‌شود با:

$$3AB=9\sqrt{3}$$

۶۷ - گزینه ۲ با نوشتن مساحت سینوسی داریم:

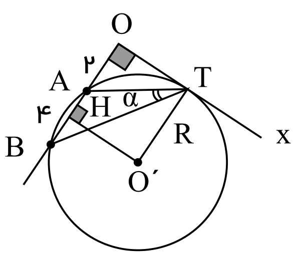
$$5\sqrt{3}=\frac{1}{2}(5\times 4)\sin\hat{A}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\hat{A}=60^\circ \text{ یا } 120^\circ\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$$

$$\text{قضیهٔ کسینوس‌ها}: a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\Rightarrow a^2=4^2+5^2-2\times 5\times 4\times\frac{1}{2}=41-20=21$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{21}$$

۶۸ - گزینه ۲

مطابق شکل دایره‌ای بر Ox در نقطهٔ T مماس است که بر A و B می‌گذرد، مطابق شکل داریم:



$$\widehat{O}=90^\circ,\ \widehat{T}=90^\circ(\text{شعاع در نقطه تماس بر مماس عمو است}),\ \hat{H}=90^\circ\Rightarrow\hat{O}'=90^\circ$$

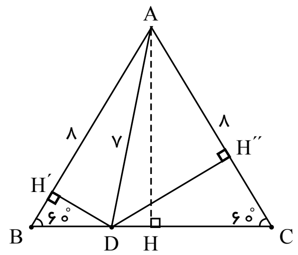
$$\Rightarrow TOHO': \text{مستطیل}\Rightarrow O'T=OH \text{ و } O'H\perp AB\Rightarrow AH=\frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow O'T=OH=OA+\frac{AB}{2}=2+\frac{4}{2}=4\Rightarrow R=4$$

در مثلث ABT قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABT}: \sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{4}{2\times 4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

۶۹ - گزینه ۳



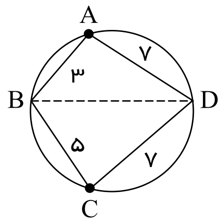
$\overset{\Delta}{ABD}$ قضیهٔ کسینوس‌ها : $۷^۲ = ۸^۲ + BD^۲ - ۲ \times ۸ \times BD \times \frac{۱}{۲}$

$$\to BD^۲ - ۸BD + ۱۵ = ۰ \to (BD-۳)(BD-۵) = ۰ \to \begin{cases} BD = ۳ \\ CD = ۵ \end{cases}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH}{\frac{۱}{۲}CD \times AH} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH'' \times AC} \to \frac{DH'}{DH''} = \frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۵} = ۰٫۶$$

۷۰ - گزینه ۲

قطر BD را رسم می‌کنیم؛ داریم:



$\overset{\Delta}{ABD}$: قضیهٔ کسینوس‌ها $BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB \times AD \times \cos\hat{A} \to BD^۲ = ۹ + ۴۹ - ۲ \times ۳ \times ۷ \times \cos\hat{A} = ۵۸ - ۴۲\cos\hat{A}$ (۱)

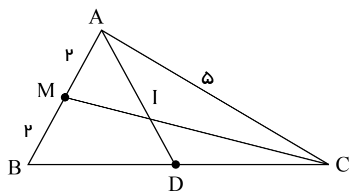
$\overset{\Delta}{BCD}$: قضیهٔ کسینوس‌ها $BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ - ۲BC \times CD\cos\hat{C} = ۷۴ - ۷۰\cos\hat{C}$ (۲)

$$(۱) = (۲) \to ۵۸ - ۴۲\cos\hat{A} = ۷۴ - ۷۰\cos\hat{C} \xrightarrow{\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \to \cos\hat{C} = -\cos\hat{A}}$$

$$۱۱۲\cos\hat{A} = -۱۶ \to \cos\hat{A} = -\frac{۱}{۷}\begin{cases} \to \sin\hat{A} = \sqrt{۱-\cos^۲ A} = \sqrt{۱-(-\frac{۱}{۷})^۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۷} \\ \to BD = \sqrt{۵۸ - ۴۲(-\frac{۱}{۷})} = \sqrt{۶۴} = ۸ \end{cases}$$

قضیهٔ سینوس‌ها: $\frac{BD}{\sin\hat{A}} = ۲R \to \frac{۸}{\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}} = ۲R \to R = \frac{۷\sqrt{۳}}{۳}$

۷۱ - گزینه ۴



$\overset{\Delta}{ABC}$ قضیهٔ میانه‌ها : $AC^۲ + BC^۲ = ۲CM^۲ + \frac{AB^۲}{۲} \to ۲۵ + ۴۹ = ۲CM^۲ + ۸ \to ۲CM^۲ = ۶۶ \to CM^۲ = ۳۳$

$$\to CM = \sqrt{۳۳}$$

$\overset{\Delta}{AMC}$: قضیهٔ نیمساز $\frac{MI}{IC} = \frac{AM}{AC} = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{MI}{CM} = \frac{۲}{۷} \to MI = \frac{۲\sqrt{۳۳}}{۷}$

۷۲ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} b\cos\hat{C} = c\sin\hat{B} \to \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\cos\hat{C}} \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ در قضیهٔ سینوس‌ها } : \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} \end{array}\right\} \to \sin\hat{C} = \cos\hat{C} \Rightarrow \tan\hat{C} = ۱ \to \hat{C} = ۴۵^\circ$$

$$\hat{B} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - (۱۳۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۵^\circ$$

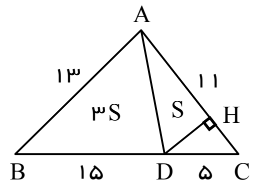
۷۳ - گزینه ۴

نصف محیط: $P=\dfrac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مساحت: $S=\sqrt{۲۲\times ۱۱\times ۹\times ۲}=۶۶$

درنتیجه بنابر (۱) در شکل زیر داریم:

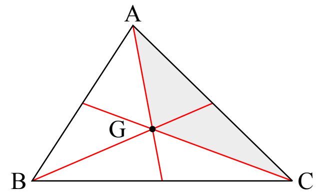


$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}=\frac{DC}{BD}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}\rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}}=S\,,\ S_{\overset{\triangle}{ABD}}=۳S\quad (۱)$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{ABD}}+S_{\overset{\triangle}{ADC}}=۳S+S=۴S=۶۶\rightarrow S=\frac{۶۶}{۴}=\frac{۳۳}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}}=\frac{۱}{۲}DH\cdot AC\rightarrow \frac{۳۳}{۲}=\frac{۱}{۲}DH\times ۱۱\rightarrow DH=۳$$

۷۴ - گزینه ۳



$$P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\sqrt{۹\times ۴\times ۳\times ۲}=۶\sqrt{۶}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AGC}}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۳}\times ۶\sqrt{۶}=۲\sqrt{۶}$$

۷۵ - گزینه ۲

روش اول:

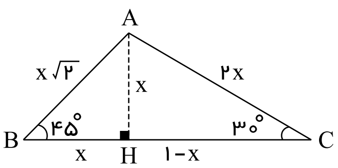
$$\overset{\triangle}{ABC}:\hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})\Rightarrow \sin\hat{A}=\sin(۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C}))=\sin(\hat{B}+\hat{C})$$

طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}\Rightarrow\frac{AC}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{۱}{\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)}\Rightarrow AC=\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ+\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ}=\frac{۱}{\cos ۳۰^\circ+\sin ۳۰^\circ}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}}=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{۳-۱}=\sqrt{۳}-۱$$

روش دوم: بدون استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها هم می‌توان اندازهٔ اضلاع مثلث را محاسبه کرد.

فرض کنیم $AH=x$ باشد. می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع روبه‌رو به زوایای ۳۰° و ۴۵° به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است، بنابراین مطابق شکل داریم:



$$\overset{\triangle}{AHC}:AC^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow(۲x)^۲=x^۲+(۱-x)^۲\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+x^۲-۲x+۱\Rightarrow ۲x^۲+۲x-۱=۰$$

$$\Delta=۲^۲-۴\times ۲\times(-۱)=۱۲\Rightarrow x=\frac{-۲\pm ۲\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}\\[2mm] x=\dfrac{-۱-\sqrt{۳}}{۱}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow AC=۲x=\sqrt{۳}-۱$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۱۲ - ۱	۲۳ - ۳	۳۴ - ۴	۴۵ - ۲	۵۶ - ۲	۶۷ - ۲
۲ - ۴	۱۳ - ۳	۲۴ - ۳	۳۵ - ۴	۴۶ - ۲	۵۷ - ۲	۶۸ - ۲
۳ - ۳	۱۴ - ۳	۲۵ - ۴	۳۶ - ۳	۴۷ - ۱	۵۸ - ۳	۶۹ - ۳
۴ - ۴	۱۵ - ۱	۲۶ - ۳	۳۷ - ۴	۴۸ - ۳	۵۹ - ۱	۷۰ - ۲
۵ - ۲	۱۶ - ۳	۲۷ - ۴	۳۸ - ۲	۴۹ - ۱	۶۰ - ۱	۷۱ - ۴
۶ - ۳	۱۷ - ۲	۲۸ - ۱	۳۹ - ۴	۵۰ - ۳	۶۱ - ۳	۷۲ - ۱
۷ - ۴	۱۸ - ۲	۲۹ - ۱	۴۰ - ۲	۵۱ - ۲	۶۲ - ۳	۷۳ - ۴
۸ - ۳	۱۹ - ۳	۳۰ - ۱	۴۱ - ۲	۵۲ - ۲	۶۳ - ۲	۷۴ - ۳
۹ - ۱	۲۰ - ۴	۳۱ - ۴	۴۲ - ۴	۵۳ - ۲	۶۴ - ۲	۷۵ - ۲
۱۰ - ۳	۲۱ - ۳	۳۲ - ۳	۴۳ - ۳	۵۴ - ۴	۶۵ - ۳	
۱۱ - ۲	۲۲ - ۴	۳۳ - ۲	۴۴ - ۲	۵۵ - ۴	۶۶ - ۲	