نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: تکالیف نوروز درس ریاضی یازدهم

تجربی

دبیرستان سپهر دانش

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

۱ - اگر خطوط $-bx+(a-b)y-۸=۰$ و $۳ax+by-c=۰$ در نقطه‌ی $(۱,۲)$ همدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آن‌گاه c کدام است؟ $(a\neq b, a\neq ۰, b\neq ۰)$

① ۱ ② -۱ ③ ۴ ④ -۴

۲ - کدام خط زیر بر خط $۳x+۲y=۴$ عمود است و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؟

① $۳y-۲x=-۴$ ② $۳y-۲x=۴$ ③ $۳y+۲x=-۴$ ④ $۳y+۲x=۲$

۳ - مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-۱,۲)$، $B(۲,۴)$ و $C(۴,-۱)$ برابر است با:

① ۱۹ ② $\frac{۱۹}{۲}$ ③ ۹ ④ ۳۸

۴ - اگر داشته باشیم، $A(۶,۵), B(۴,۱)$ و $C(-۲,-۱)$، فاصلهٔ نقطهٔ A از عمود منصف پاره‌خط BC چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟

① ۱ ② ۲ ③ $\frac{۹}{۱۰}$ ④ $\frac{۹}{۵}$

۵ - فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ از نقطه‌ای به طول ۴ روی خط $۳x+۲y=۲$ کدام است؟

① ۲ ② ۵ ③ $۲\sqrt{۱۰}$ ④ $\sqrt{۱۰}$

۶ - در بازهٔ (a,b) عبارت $۱۵x^۲+۷۳x+۱۴$ منفی و عبارت $\left|\frac{x-۱}{۲}-۱\right|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۳}$ ② $\frac{۲۳}{۳}$ ③ $\frac{۴}{۱۵}$ ④ $\frac{۶۷}{۱۵}$

۷ - اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۶x+۴=۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ کدام است؟

① $\sqrt{۶}$ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $۲\sqrt{۳}$ ④ $\sqrt{۱۰}$

۸ - به ازای کدام مقدار m، رابطه‌ی $x_۱x_۲+x_۱+x_۲=۴$ بین ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^۲+(۲m-۱)x=۵$ برقرار است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $-\frac{۳}{۲}$ ④ هیچ مقدار m

۹ - اگر معادله‌ی $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

① $m<-۴$ ② $m>۴$ ③ $-۴<m<۴$ ④ $۴<m<۹$

۱۰- برد تابع $f(x) = -x^۲ + ۶x + ۲$ کدام است؟

۱) $(-\infty, ۳]$ ۲) $(-\infty, ۱۱]$ ۳) $[۱۱, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۱- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + (k+۱)x + k + ۴ = ۰$، اگر حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها باشد، آن‌گاه تابع $f(x) = kx^۲ - ۴x + ۱$ چگونه است؟

۱) ماکسیممی برابر ۳ دارد. ۲) مینیممی برابر ۳ دارد. ۳) ماکسیممی برابر -۱ دارد. ۴) مینیممی برابر -۱ دارد.

۱۲- نمودار تابع $f(x) = mx^۲ - \frac{۲}{۳}mx + ۱$ همواره بالای محور طول‌ها قرار دارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن m کدام است؟

۱) $(۰, ۹)$ ۲) $[۰, ۹)$ ۳) $(۳, -۳)$ ۴) $[۰, -۹]$

۱۳- مقدار ۳۰۰ کیلوگرم محلول آب و نمک با غلظت ۱۵ درصد داریم. می‌خواهیم آن را به محلولی با غلظت ۲۵ درصد تبدیل کنیم. برای این کار ابتدا ۲۰ کیلوگرم نمک به آن اضافه می‌کنیم و سپس مقداری آب تبخیر می‌کنیم. چند کیلوگرم آب تبخیر شده است؟

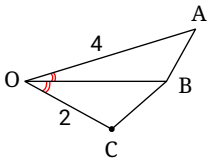
۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۶۸ ۴) ۷۴

۱۴- در مورد ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۶x - \sqrt{x^۲ - ۳x} = ۶$ کدام گزینه درست است؟

۱) دو ریشهٔ حقیقی با مجموع ۳ دارد. ۲) دو ریشهٔ حقیقی با مجموع ۴٫۵ دارد. ۳) چهار ریشهٔ حقیقی با مجموع ۶ دارد. ۴) چهار ریشهٔ حقیقی با مجموع ۴٫۵ دارد.

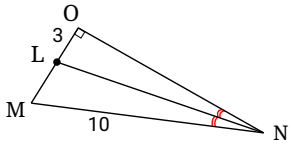
فصل دوم : هندسه

۱۵- با توجه به شکل زیر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ برابر ۶ واحد است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۶- مساحت مثلث $\overset{\Delta}{LMN}$ کدام گزینه است؟

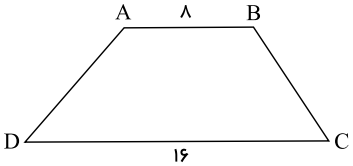


۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۷- نقطهٔ O روی عمودمنصف دو ضلع AB و AC در مثلث ABC قرار دارد. اگر $OA = x + ۱$ ، $OB = y - ۲$ ، $OC = y - x + ۲$ و $AC = y + ۱$ باشد، مساحت مثلث OAC کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

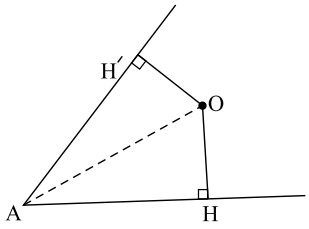
۱۸- در ذوزنقهٔ زیر مساحت برابر ۴۸ است. اگر نیمسازهای زوایای A و D همدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند فاصلهٔ M از ضلع AD کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

تکالیف نوروز درس ریاضی یازدهم تجربی

۱۹ - در شکل زیر اندازهٔ زاویهٔ A برابر 60° است و نقطهٔ O فاصله‌اش از A برابر ۱۰ و فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است. مساحت ۴ضلعی AH چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

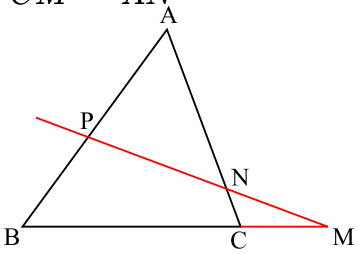


① ۲۵
② ۲۰
③ ۳۰
④ ۳۵

۲۰ - اگر $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \cdots = \frac{a_n}{n}$، آنگاه حاصل $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

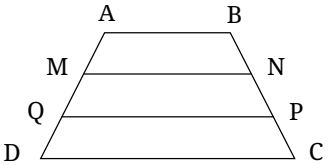
① n
② $n(n+1)$
③ $\frac{n(n+1)}{2}$
④ $2n(n+1)$

۲۱ - از نقطه‌ی M واقع بر امتداد ضلع BC، خطی رسم می‌کنیم تا اضلاع AC و AB را به ترتیب در N و P قطع کند. مقدار $\frac{BM}{CM} \times \frac{CN}{AN}$ برابر کدام است؟



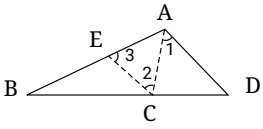
① $\frac{BP}{AP}$
② $\frac{AP}{BP}$
③ $\frac{AP}{AB}$
④ $\frac{BP}{AB}$

۲۲ - در شکل زیر MN و PQ اضلاع AD و BC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. مساحت ذوزنقهٔ $MNPQ$ چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ است؟



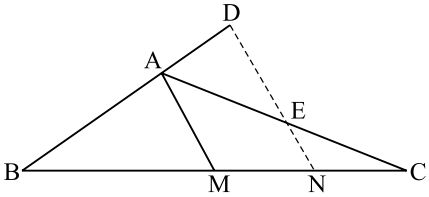
① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

۲۳ - در شکل مقابل سه زاویه‌ی ۱، ۲ و ۳ برابرند. اگر $AC = 6$، $AB = 15$، نسبت $\frac{DB}{DC}$ برابر کدام است؟



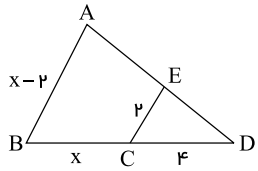
① ۱
② ۳
③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{3}$

۲۴ - در مثلث ABC $\left(AB = \frac{2}{3}AC\right)$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



① $\frac{4}{9}$
② $\frac{5}{9}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{5}$

۲۵ - در شکل مقابل $AB \| CE$ است. مقدار $\frac{x+2}{4}$ کدام است؟

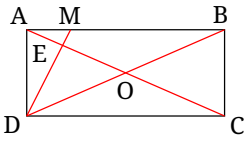


① ۱٫۵
② ۱٫۷۵
③ ۲٫۵
④ ۲٫۲۵

۲۶ - در ذوزنقه‌ی قائم الزاویه‌ای قطرها برهم عمودند. اگر طول قاعده‌ها ۷ و ۲۸ باشد، طول ساق عمود بر دو قاعده چقدر است؟

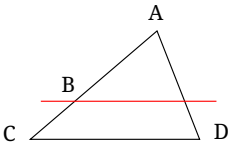
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۷ - در مستطیل $ABCD$ داریم: $۳AB = ۴BC = ۱۲AM = ۲۴$ و خط DM قطر AC را در نقطه‌ی E قطع می‌کند. طول EO چه قدر است؟



۱) ۳ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۲۸ - در شکل مقابل $AB = \frac{۳}{۲}BC$ است و دو خط موازی‌اند. مساحت مثلث کوچکتر چند درصد مساحت مثلث بزرگتر است؟

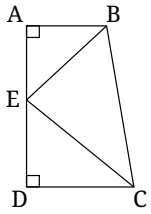


۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۲۹ - درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

۱) ۰٫۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱٫۲۵ ۴) ۱٫۵

۳۰ - در شکل مقابل BE نیمساز زاویه‌ی $A\hat{B}C$ و CE نیمساز زاویه‌ی $B\hat{C}D$ و $\widehat{A} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$ است. $AB + DC$ برابر کدام است؟



۱) BC
۲) AD
۳) EC
۴) $\frac{AD + BC}{۲}$

۳۱ - در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲٫۲۵ ۳) ۲٫۷۵ ۴) ۳

فصل سوم : توابع

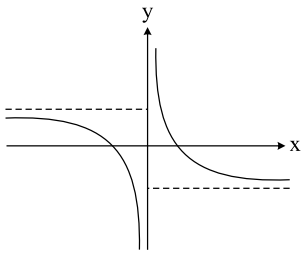
۳۲ - اگر $f(x^۲ + ۲x) = \frac{x^۴ + ۴}{x^۲ - ۲x + ۲}$، مقدار $f(۵)$ کدام است؟

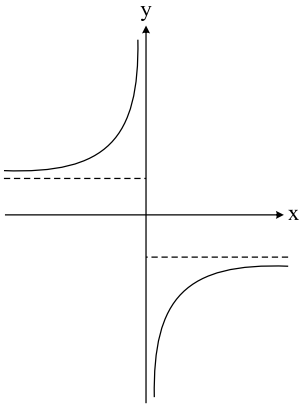
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

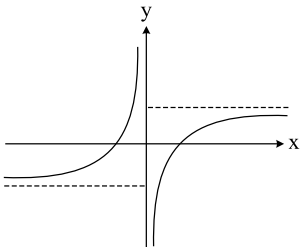
۳۳ - برد تابع $y = \frac{۳x^۲ - ۶x + ۷}{x^۲ - ۲x + ۱}$ شامل کدام عدد نیست؟

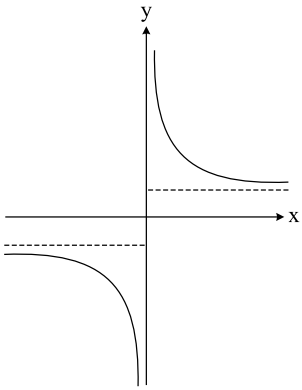
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۳۴- نمودار تابع $y = \frac{۱}{x} - \frac{|x|}{x}$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۳۵- در کدام مورد دو تابع f و g برابرند؟

① $g(x) = x - ۳, f(x) = \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳}$

② $g(x) = x^۲ + x + ۱, f(x) = \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱}$

③ $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱}, f(x) = \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱}$

④ $g(x) = x - ۲, f(x) = \frac{x^۳ - ۸}{x^۲ + ۲x + ۴}$

۳۶- دامنهٔ تابع $y = \frac{\sqrt{[x] - x}}{[x] + [-x]}$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

① $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

② $\mathbb{Z}$

③ $\mathbb{Z}^+$

④ $\varnothing$

۳۷- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x - ۱} & , x < ۴ \\ \sqrt{x - ۲} & , x = ۴ \\ [x] + ۱ & , x > ۴ \end{cases}$ باشد، حاصل $f(-۱) + f(\sqrt{۴۰}) - f(۴)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① $۶٫۵ - \sqrt{۲}$

② $۵٫۵ - \sqrt{۲}$

③ $۶٫۵ + ۲\sqrt{۱۰} - \sqrt{۲}$

④ $۵٫۵ - ۲\sqrt{۲}$

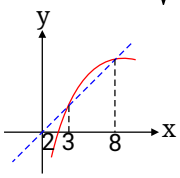
۳۸- کم‌ترین مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x+k & , x<۰ \\ -۲x+۳ & , x\geq ۰ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۹- کدام گزینه غلط است؟

① نمودار هر تابع به شکل خط راست (غیرافقی) یک‌به‌یک است.
② نمودار هر تابع به شکل سهمی یک‌به‌یک نیست.
③ تابع پله‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.
④ تابع چند ضابطه‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۴۰- شکل روبه‌رو، مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$، کدام است؟



① $(۰,۲]$ ② $[۲,۳]$ ③ $[۲,۸]$ ④ $[۳,۸]$

۴۱- تابع $f(x)=|۶-۳x|+۳x$ در یک بازه‌ی خاص وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ کدام گزینه می‌باشد؟

① $y=\frac{۱}{۶}x+۱ \quad x\geq ۲$
② $y=\frac{۱}{۶}x+۱ \quad x\geq ۶$
③ $y=\frac{۱}{۶}x-۱ \quad x\leq ۲$
④ $y=\frac{۱}{۶}x-۱ \quad x\leq ۶$

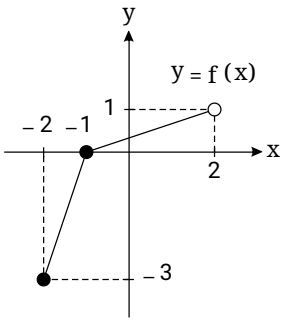
۴۲- اگر $x\geq ۱$; $f(x)=x^۲-۲x-۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}(x)$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۱۸ ④ ۲۱

۴۳- تابع $f(x)=|۲x-۳|+۱$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$ مفروض است. وارون تابع f کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲; D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$
② $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲; D_{f^{-۱}}=[۲,۶]$
③ $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱; D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$
④ $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱; D_{f^{-۱}}=[-۴,۰]$

۴۴- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است، اگر تابع $g(x)=(f+f^{-۱})(x)$ باشد، حاصل $g(-۱)$ کدام است؟



① $-\frac{۵}{۳}$ ② $-\frac{۴}{۳}$ ③ -۶ ④ $-\frac{۲}{۳}$

۴۵- دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-x-۲}-\sqrt{۲-x}$ کدام است؟

① $\{۲\}$ ② $[-۱,۲)$ ③ $[-\infty,۲)$ ④ $(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$

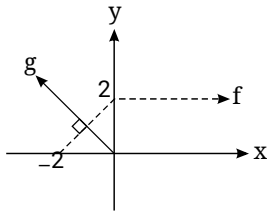
۴۶- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $f-g=\{(۱,-۴),(۳,۱)\}$ باشد، آنگاه $g(۱)-۲g(۳)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x+۶}$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty,a]$ و $g(x)=|۲x-۳|$ باشد، حاصل $(f-g)(a)$ کدام است؟

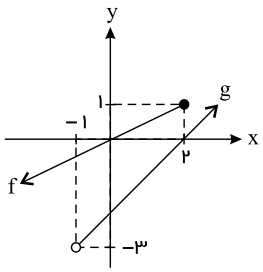
① -۳ ② ۳ ③ -۲ ④ ۲

۴۸- اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، برد تابع $f+۲g$ کدام است؟ (تابع f به‌صورت خط‌چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است.)



① $[-۲,۰]$ ② $[۲,۴]$
③ $[۲,۵)$ ④ $[-۲,۲]$

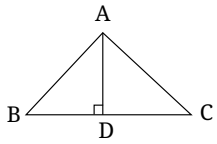
۴۹- نمودار توابع f و g به‌صورت مقابل است. دامنه و ضابطهٔ تابع $f-g$ کدام است؟



① $\frac{۱}{۲}x-۲,-۱<x\leq ۲$ ② $-\frac{۱}{۲}x+۲,-۱<x\leq ۲$
③ $-\frac{۱}{۲}x-۲,x\geq -۱$ ④ $\frac{۱}{۲}x+۲,x\leq ۲$

فصل چهارم : مثلثات

۵۰- در شکل زیر $\frac{CD}{AD}=\sqrt{۳}$ ، $\frac{AC}{AD}=۲$ و $\frac{AB}{AD}=\sqrt{۲}$ است. زاویه $B\hat{A}C$ چند برابر زاویه $A\hat{C}D$ است؟

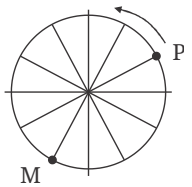


① ۳ ② ۲
③ $\frac{۷}{۳}$ ④ $\frac{۷}{۲}$

۵۱- شعاع چرخ جلو درشکه‌ای یک متر و شعاع چرخ عقب آن ۱۲۰ cm است. وقتی چرخ جلو ۷۰° می‌چرخد، چرخ عقب چند رادیان می‌چرخد؟

① $\frac{۷\pi}{۱۸}$ ② $\frac{۳۵\pi}{۱۰۸}$ ③ $\frac{۳۱\pi}{۱۰۸}$ ④ $\frac{۳۵\pi}{۵۰}$

۵۲- چرخ و فلکی دوازده کابین دارد و شعاع آن ۲۰ متر است. اگر در ابتدای حرکت کابین در نقطهٔ P و در نقطهٔ M متوقف شود، (با فرض حرکت در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی باشد) مسیر طی شده به‌وسیلهٔ کابین چقدر است؟



① $\frac{۷۰\pi}{۳}$ متر ② $\frac{۵۰\pi}{۳}$ متر
③ ۲۵π متر ④ ۲۴π متر

۵۳- چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شمارهٔ پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازهٔ $\frac{۱۱\pi}{۳}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیهٔ کدام کابین قرار می‌گیرند؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی است و فاصلهٔ کابین‌ها یکسان است.)

① ۲۵ ② ۳۰ ③ ۳۴ ④ ۳۵

۵۴ - چندتا از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) اگر زاویهٔ بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث بزرگ‌تر از اندازهٔ هر ساق آن است.

ب) اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{۵}$ و $\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان باشند، اندازهٔ زاویهٔ سوم ۷۲ درجه است.

پ) انتهای کمان $\frac{۵\pi}{۶}$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است.

ت) $-\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان برابر -۹ درجه است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۵۵ - زاویهٔ -۳۲۰ درجه، چند رادیان است؟

① $-\frac{۱۶}{۹}\pi$ ② $-\frac{۴}{۳}\pi$ ③ $-\frac{۵}{۴}\pi$ ④ $-\frac{۲۵}{۹}\pi$

۵۶ - کدام گزینه نمی‌تواند زوایای داخلی یک مثلث باشد؟

① $۷۲^\circ, \frac{۲\pi}{۵}rad, \frac{\pi}{۵}rad$ ② $۷۵^\circ, \frac{\pi}{۲}rad, \frac{\pi}{۱۲}rad$ ③ $۲۰^\circ, \frac{۷\pi}{۱۸}rad, \frac{۵\pi}{۹}rad$ ④ $۳۰^\circ, \frac{\pi}{۶}rad, \frac{۲\pi}{۳}rad$

۵۷ - اگر $\cos x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و x در ربع اوّل باشد، $\tan x$ کدام است؟

① $۲\sqrt{۵}$ ② $\sqrt{۵}$ ③ $۸\sqrt{۵}$ ④ $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۵۸ - عبارت $\frac{\cos^۳\alpha - \sin^۳\alpha}{۱ + \sin\alpha\cos\alpha}$ با کدام گزینه معادل است؟

① $\sin\alpha - \cos\alpha$ ② $\cos\alpha - \sin\alpha$ ③ $۲ + \sin\alpha$ ④ $۲ + \cos\alpha$

۵۹ - اگر $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه حاصل $\sin^۸\alpha + \cos^۸\alpha$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۸}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۱۶}$

۶۰ - اگر $\sin x \cdot \cos x = -\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi$ باشد، مقدار $\sin x + \cos x$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

۶۱ - اگر $a + b = \frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $\cos(\frac{\pi}{۲} - a)\cos(\frac{\pi}{۲} - b)\ \cos b\ \cos a$ ۸ کدام است؟

① $\sin ۴a$ ② $\cos ۴a$ ③ $\sin^۲ ۲a$ ④ $\cos^۲ ۲a$

۶۲- اگر $\tan ۳۵^\circ = x^۲ - ۱$ باشد، حاصل $\frac{\sin ۱۴۵^\circ - \sin ۲۳۵^\circ}{\cos ۳۲۵^\circ}$ برحسب x کدام است؟

① $x^۲$ ② $x^۲ + ۲$ ③ $\frac{۱}{x^۲}$ ④ $\frac{۲}{x^۲ + ۱}$

۶۳- اگر $\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \theta)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta)} = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\pi - \theta) + ۲\cos(\pi + \theta)}{۲\sin(۲\pi - \theta) + \cos(۲\pi + \theta)}$ کدام است؟

① صفر ② $-\frac{۵}{۴}$ ③ $-\frac{۴}{۵}$ ④ تعریف‌نشده

۶۴- حاصل $\cos ۲۴۰^\circ + \sin ۲۱۰^\circ$ کدام است؟

① $\frac{-\sqrt{۳} - ۱}{۲}$ ② $-\sqrt{۳}$ ③ صفر ④ -۱

۶۵- در تساوی $\cos(\frac{۲\pi}{۹} + x) = \sin(x + \frac{\pi}{۹})$ کدام مقدار به جای x (یک زاویهٔ مناسب) می‌تواند قرار بگیرد؟

① $\frac{\pi}{۳}$ ② $\frac{\pi}{۶}$ ③ $\frac{\pi}{۱۲}$ ④ $\frac{\pi}{۴}$

۶۶- حاصل $A = \sqrt{۲}\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}) - \sqrt{۳}\tan(\frac{۳۱\pi}{۶})$ کدام است؟

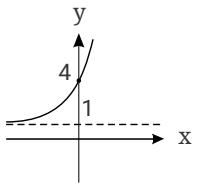
① صفر ② -۱ ③ -۲ ④ ۲

فصل پنجم : توابع نمایی و لگاریتمی

۶۷- تابع نمایی f با ضابطهٔ $f(x) = k(b)^{x+۱}$ $(k \neq ۰)$, مفروض است. در این تابع $f(x_۱ + x_۲)$ کدام است؟

① $\frac{f(x_۱) + f(x_۲)}{bk}$ ② $\frac{f(x_۱) + f(x_۲)}{k}$ ③ $f(x_۱) + f(x_۲)$ ④ $\frac{f(x_۱) \times f(x_۲)}{bk}$

۶۸- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = a(\sqrt{۲})^{bx} + ۱$ به صورت زیر است. کدام گزینه درست است؟



① $b < ۰, a = -۳$ ② $b < ۰, a = ۳$ ③ $b > ۰, a = ۳$ ④ $b > ۰, a = \frac{۱}{۳}$

۶۹- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{x-۱} > ۰/۰۸$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۷۰- جواب معادلهٔ $\frac{\sqrt{۳}}{۲۷}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\right)^{x}=\sqrt{۲۷}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲۴۳}\right)^{۳-x}$ کدام است؟

① $-\frac{۵۷}{۲۹}$ ② $-\frac{۶۷}{۳۱}$ ③ $\frac{۵۷}{۲۹}$ ④ $\frac{۳۱}{۶۷}$

۷۱- دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{\log_{۳}^{\frac{x-۱}{x+۱}}}$ کدام است؟

① $x<-۱$ یا $x>۱$ ② $x>۱$ ③ $x<-۱$ ④ $x\geq ۱$ یا $x<-۱$

۷۲- برد تابع $f(x)=\log_{\sqrt{۳}}^{(\sqrt{۳-x}+\sqrt{x-۳}+۸۱)}$ کدام گزینه است؟

① $[۸,+\infty)$ ② $(-\infty,۸]$ ③ $[۰,۴]$ ④ $\{۸\}$

۷۳- نمودار تابع $f(x)=۳-\log_{۲}(x+۲)$ از کدام‌یک از نواحی مختصاتی نمی‌گذرد؟

① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۷۴- اگر $\log_{۲} x=۲$ و $\log_{\sqrt{۲}} y=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $۲\sqrt{۲}\log_{xy}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

۷۵- اثر یک داروی بیهوشی در مدت ۳۰ دقیقه از بین می‌رود. اگر اثر مادهٔ بیهوشی از رابطهٔ $f(t)=۱۰۰-۲۰\log_{۲}^{(t+۲)}$ محاسبه شود، پس از گذشت ۶ دقیقه چه اثری از داروی باقی‌مانده است؟

① ۲۰% ② ۴۰% ③ ۶۰% ④ ۸۰%

۷۶- جواب معادله‌ی $\log(x+۴)=\log\sqrt{۲x+۱۱}$ کدام است؟

① -۳ ② -۵ ③ -۱ ④ ۳

۷۷- اگر $\log(۲^{x}+۸)=\log ۲+x\log ۲$، آنگاه حاصل $\frac{\log_{x}^{۳}+۳}{\log_{۳}^{x}+۱}$ برابر کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۴}{۳}$ ③ ۳ ④ ۲

۷۸- اگر $۲^{(\log_{۲}^{(x+۲)}+\log_{۲}^{(x-۲)})}=۳^{\frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{۲}}^{۳x}}$ باشد، حاصل $\log_{۲}^{(x+۴)}$ کدام است؟

① ۲ ② ۴ ③ ۳ ④ ۵

۷۹- از معادلهٔ $\log_{۱۶}^{(x+۱۴)}+\log_{۴}^{(x+۱۴)}+\log_{۲}^{(x+۱۴)}=۷$، مقدار لگاریتم $\sqrt{x}$ در مبنای ۸ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② ۱ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{۱}{۶}$

۸۰- اگر $\log_{۲۵}^{۶x+۱}=\log_{۳}^{\sqrt[۳]{۳}}-\log_{۵}^{\sqrt{x+۱}}$، آن‌گاه حاصل $\log_{۸}^{۳x+۴}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۴}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۸۱ - اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\log_{۳}^{x^{۲}-۷x+۲۱} = ۲$ باشند، حاصل $\log_{۱۲۵}^{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $-\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ $-\frac{۳}{۲}$

۸۲ - جواب نامعادلهٔ $۲^{x} \geq x^{۲}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ بی‌شمار

۸۳ - به ازای افزایش یک واحد مقیاس ریشتر، قدرت تخریب زلزله چند برابر می‌شود؟

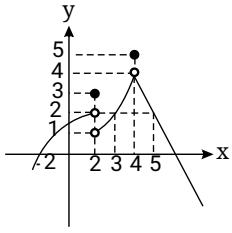
① ۲ ② ۴ ③ ۱۰ ④ $۱۰\sqrt{۱۰}$

۸۴ - اگر $x > ۰$ باشد، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر همواره صحیح است؟

① $\log(۱+x) < \frac{x}{۱+x}$ ② $\log(۱+x) > x$ ③ $\frac{\log(۱+x)}{x} > \frac{x}{۱+x}$ ④ $\log(۱+x) < x$

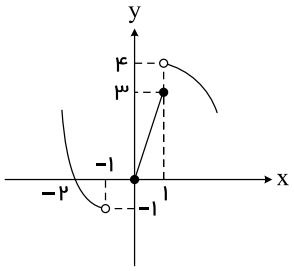
فصل ششم : حد و پیوستگی

۸۵ - شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x)$ است. حاصل عبارت $A = \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) + \lim\limits_{x\to ۴} f(x) + \lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} f(x)$ کدام است؟



① ۷ ② ۸ ③ ۶ ④ ۵

۸۶ - با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}[f(x)] + \lim\limits_{x\to -۱^{-}} |f(x)| + \lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)



① ۴ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۸۷ - اگر $f(x) = \begin{cases} x^{۳}+۱ & x > ۲ \\ \sqrt{۲x} & x < ۲ \end{cases}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f\left(\frac{۴}{x}\right)$ کدام است؟

① ۹ ② ۲ ③ صفر ④ ۱

۸۸ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x^{۲}-۱ & , \quad x > ۲ \\ ax-b & , \quad x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۴$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

① $\frac{۲۶}{۳}$ ② -۴ ③ ۱۱ ④ $-\frac{۱۱}{۳}$

۸۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}^-}\left[\frac{۱۲}{\tan^۲ x}\right]$ کدام است؟($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۱

۹۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)-\lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ -۱ ④ ۰

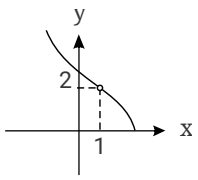
۹۱- مقدار $\lim\limits_{x\to n}\cos(\pi(x-[x]))$ کدام است؟ ($n\in\mathbb{Z}$ و $[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

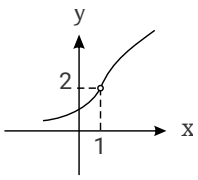
① ۰ ② ۱ ③ -۱ ④ وجود ندارد.

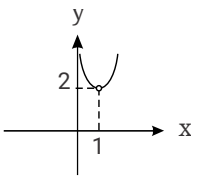
۹۲- حاصل $\lim\limits_{x\to۲}\frac{۵x^۲-۴x-۱۲}{۹x^۲-۶x-۲۴}$ کدام است؟

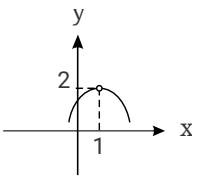
① $\frac{۸}{۱۵}$ ② صفر ③ $\frac{-۸}{۱۵}$ ④ $\frac{۸}{۲۰}$

۹۳- اگر $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=۲$ باشد و در اطراف $x=۱$ داشته باشیم $\frac{f(x)-۲}{۱-x}<۰$ کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع f در اطراف $x=۱$ باشد؟

① 

② 

③ 

④ 

۹۴- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{[x]\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{۲\sin x\cos x}$ کدام است؟ ($[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{۳}{۲}$ ② $-\frac{۳}{۲}$ ③ ۲ ④ -۲

۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos^۳(\pi-x)}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $-\frac{۲}{۳}$

۹۶- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱+\sin x}$ کدام است؟

① صفر ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۹۷- حاصل $\lim\limits_{x\to۸}\frac{x^۲-۶۴}{x^۲-۸x}$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ -۲ ④ ۲

۹۸- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۲}} \frac{۱+\sin^۳ x}{\cos^۲ x}$ کدام است؟

① ۲ ② -۳ ③ ۳ ④ $\frac{۳}{۲}$

۹۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۳g(a)+۱ & x\neq ۱ \\ ۳b+۱ & x=۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد و تابع $g(x)=\begin{cases} \frac{b^۲+۲}{۳} & x\geq a \\ ۱ & x<a \end{cases}$ در $x=-۱$ پیوسته نباشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

① ۳ ② -۳ ③ ۲ ④ -۲

۱۰۰- تابع $f(x)=[\frac{-۳}{x}]$ در بازهٔ $(\frac{۲}{۱۳}-k, \frac{۱}{۴})$ پیوسته است. حداکثر مقدار k کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

① $\frac{۵}{۱۳}$ ② $-\frac{۱}{۱۳}$ ③ $-\frac{۵}{۷}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۱۰۱- تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|-۱}{|x^۲-۱|}+ax & , \quad |x|<۱ \\ \sin(\frac{۳\pi}{۲}x)+b & , \quad |x|\geq ۱ \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. حاصل $۳a+۲b$ کدام است؟

① -۱ ② ۱ ③ ۵ ④ -۴

فصل هفتم : آمار و احتمال

۱۰۲- جعبه‌ای شامل ۴مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است. از داخل جعبه، ابتدا یک مهره با جایگذاری بر می‌داریم. سپس دو مهره‌ی دیگر یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دومین مهره‌ی سفید، بلافاصله بعد از اولین مهره‌ی سیاه خارج می‌شود؟

① $\frac{۵}{۴۲}$ ② $\frac{۱۰}{۶۳}$ ③ $\frac{۵}{۵۴}$ ④ $\frac{۱۰}{۸۱}$

۱۰۳- در پرتاب دو تاس اگر بدانیم که حاصل‌ضرب اعداد روشده فرد است، احتمال آنکه مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۱}{۶}$ ④ $\frac{۵}{۱۲}$

۱۰۴- خانواده‌های A و B هر کدام دارای ۳ فرزند هستند، احتمال آن که تعداد دخترهای خانواده A از تعداد دخترهای خانواده B بیشتر باشد؟

① $\frac{۱۷}{۳۲}$ ② $\frac{۷}{۳۲}$ ③ $\frac{۹}{۳۲}$ ④ $\frac{۱۱}{۳۲}$

۱۰۵- در پرتاب دو تاس، A پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در تاس دوم و B پیشامد ظاهر شدن مجموع x برای دو تاس است. اگر بدانیم A و B دو پیشامد مستقل می‌باشند، x کدام است؟

① ۱۰ ② ۹ ③ ۷ ④ ۸

۱۰۶- قرار است برای تحقیق در مورد موضوع خاصی از دانش‌آموزان یک دبیرستان، نمونه‌گیری شود. در انتخاب اعضای نمونه کدام صحیح است؟

① افراد به طور تصادفی انتخاب شوند.
② از هر کلاس، یک نفر انتخاب شود.
③ تمامی افراد از یک کلاس انتخاب شوند.
④ افراد متناسب با موضوع مورد تحقیق انتخاب شوند.

۱۰۷ - در کدام مورد، عمل سرشماری انجام نشده است؟

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد.
(۲) نمونه برابر جامعه‌ی آماری
(۳) اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه
(۴) نمونه، زیرمجموعه‌ی محض جامعه‌ی آماری

۱۰۸ - اگر واریانس داده‌های a, b, c, ۴ برابر صفر باشد آن‌گاه میانگین داده‌های $a+۱$, $b+۲$, $c+۳$, ۸ چقدر است؟

(۱) ۶٫۵ (۲) ۶ (۳) ۷٫۵ (۴) ۵

۱۰۹ - اگر ضریب تغییرات داده‌های آماری $\{k+۱, k+۲, k+۳, k+۴, k+۵\}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ باشد، k کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۱۰ - اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازهٔ اضلاع مربع‌هایی به ترتیب ۴۰ و ۰٫۱ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(۱) ۱۶۰۰ (۲) ۱۶۶۰ (۳) ۱۶۱۶ (۴) ۱۵۸۴

۱۱۱ - در ۶۰دادهٔ آماری میانگین ۳ و انحراف معیار ۱٫۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

(۱) ۰٫۱ (۲) ۰٫۲ (۳) ۰٫۳ (۴) ۰٫۴

۱۱۲ - اگر ضریب تغییرات داده‌های ۲ , $x_۸$, ... , $x_۲$, $x_۱$ برابر با صفر باشد، آنگاه میانگین داده‌ها کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) صفر

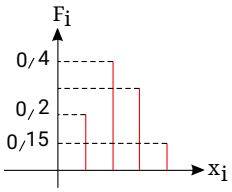
۱۱۳ - نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B به تفکیک گزارش شده است. یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟

A : ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲

B : ۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰

(۱) A (۲) B (۳) فرقی نمی‌کند. (۴) نیاز به اطلاعات بیشتر

۱۱۴ - نمودار میله‌ای فراوانی نسبی ۲۴ داده‌ی آماری به صورت زیر است. فراوانی مطلق دسته‌ی سوم کدام است؟



(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۱۵ - در داده‌های ۱۶ و ۱۸ و ۲۰ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۷ و ۹ و ۱۹ و ۱۰ و ۱۲ و ۵ و ۸ و ۲۱ و ۷ واریانس داده‌های بین چارک اول و سوم کدام است؟

(۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۷}$ (۲) $\frac{۵۸}{۷}$ (۳) $\frac{۲}{۷}$ (۴) $\frac{۴۸}{۷}$

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲ هر دو خط از نقطه‌ی $(۱, ۲)$ می‌گذرند. لذا مختصات این نقطه در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -b(۱) + (a-b)(۲) - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲a - ۳b - ۸ = ۰ \\ ۳a(۱) + b(۲) - c = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b - c = ۰ \end{cases} \quad (*)$$

از طرفی بنابر فرض سؤال، دو خط بر هم عمودند. شیب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-bx + (a-b)y - ۸ = ۰ \Rightarrow (a-b)y = bx + ۸$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{(a-b)}x + \frac{۸}{(a-b)} \Rightarrow m_۱ = \frac{b}{a-b}$$

$$۳ax + by - c = ۰ \Rightarrow by = -۳ax + c \Rightarrow y = -\frac{۳a}{b}x + \frac{c}{b} \Rightarrow m_۲ = -\frac{۳a}{b}$$

از آنجایی که شیب دو خط بر هم عمودند داریم:

$$m_۱m_۲ = -۱ \Rightarrow \frac{b}{a-b} \times (-\frac{۳a}{b}) = -۱ \xrightarrow{b \neq ۰} \frac{-۳a}{a-b} = -۱ \Rightarrow ۳a = a - b \Rightarrow \boxed{۲a = -b}$$

در رابطه‌های دستگاه $(*)$ به جای $۲a$، مقدار $-b$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۲a - ۳b - ۸ = ۰ \xrightarrow{۲a=-b} -۴b - ۸ = ۰ \Rightarrow \boxed{b = -۲}, \boxed{a = ۱} \\ ۳a + ۲b - c = ۰ \Rightarrow ۳ \times (۱) + ۲ \times (-۲) - c = ۰ \Rightarrow ۳ - ۴ - c = ۰ \Rightarrow \boxed{c = -۱} \end{cases}$$

۲ ـ گزینه ۱

$$۳x + ۲y = ۴ \to ۲y = -۳x + ۴ \to y = -\frac{۳}{۲}x + ۲ \to m' = -\frac{۳}{۲}$$

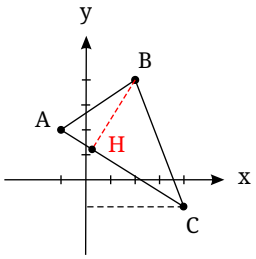
پس شیب خط عمود بر خط بالا $m = \frac{۲}{۳}$ است که از نقطهٔ $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۰ \end{vmatrix}$ می‌گذرد:

$$y - ۰ = \frac{۲}{۳}(x - ۲) \to ۳y = ۲x - ۴ \to ۳y - ۲x = -۴$$

۳ ـ گزینه ۲

قدم اول رسم یک تصویر کلی از مثلث مورد نظر می‌باشد.

برای محاسبهٔ مساحت باید طول ارتفاع BH و ضلع AC را محاسبه نماییم.



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-۱ - ۲}{۴ - (-۱)} = \frac{-۳}{۵}$$

معادله ضلع AC: $y - y_۰ = m(x - x_۰) \to y - ۲ = -\frac{۳}{۵}(x + ۱) \to y = -\frac{۳}{۵}x - \frac{۳}{۵} + ۲$

$$\to ۵y = -۳x + ۷ \to ۳x + ۵y - ۷ = ۰$$

کافیست فاصلهٔ نقطهٔ B را تا خط AC محاسبه نماییم

طول ارتفاع BH: $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳(۲) + ۵(۴) - ۷|}{\sqrt{۳^۲ + ۵^۲}} = \frac{۱۹}{\sqrt{۳۴}}$

طول ضلع AC : $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۴ + ۱)^۲ + (-۱ - ۲)^۲} = \sqrt{۳۴}$

مساحت: $S=\frac{۱}{۲}\times AC\times BH=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۹}{\sqrt{۳۴}}\times\sqrt{۳۴}=\frac{۱۹}{۲}$

۴ ـ گزینه ۲

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=m_{BC}=\frac{-۱-۱}{-۲-۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC$ شیب عمود منصف $=-\frac{۱}{m_{BC}}=-۳$

$M=\left(\frac{-۲+۴}{۲},\frac{-۱+۱}{۲}\right)\Rightarrow M=(۱,۰)$ (وسط BC)

معادلهٔ عمودمنصف BC : $y-۰=-۳(x-۱)\Rightarrow y=-۳x+۳\Rightarrow ۳x+y-۳=۰$

$A(۶,۵)\Rightarrow AH=\frac{|۳(۶)+۵-۳|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۱۰}}=۲\sqrt{۱۰}$

۵ ـ گزینه ۳

$۳x+۲y=۲\xrightarrow{x=۴\ \text{(نقطه‌ای به طول ۴)}}۳(۴)+۲y=۲\to ۱۲+۲y=۲$

$\to ۲y=-۱۰\to \boxed{y=-۵}\to B(۴,-۵)\ ,\ A(۲,۱)$

$\to \overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۵-۱)^۲}$

$\to \overline{AB}=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=\sqrt{۴\times ۱۰}\to \boxed{\overline{AB}=۲\sqrt{۱۰}}$

۶ ـ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$۱۵x^۲+۷۳x+۱۴<۰\Rightarrow \underbrace{(۵x+۱)}_{x=-\frac{۱}{۵}}\ \underbrace{(۳x+۱۴)}_{x=-\frac{۱۴}{۳}}<۰\Rightarrow \frac{-۱۴}{۳}<x<\frac{-۱}{۵}\quad (I)$

$|\frac{x-۱}{۲}-۱|>۳\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x-۱}{۲}-۱>۳\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}>۴\Rightarrow x>۹\\ \frac{x-۱}{۲}-۱<-۳\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}<-۲\Rightarrow x<-۳\end{array}\right\}\quad (II)$

$\xrightarrow{\text{اشتراک }(II),(I)}-\frac{۱۴}{۳}<x<-۳\Rightarrow max(b-a)=-۳-(-\frac{۱۴}{۳})=\frac{۵}{۳}$

۷ ـ گزینه ۴

$x^۲-۶x+۴=۰\to \left\{\begin{array}{l}\text{جمع ریشه‌ها: }\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶\\ \text{ضرب ریشه‌ها: }\alpha\beta=\frac{c}{a}=۴\end{array}\right.$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}=A\to A^۲=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}+\frac{۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\to A^۲=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$

$\to A^۲=\frac{۶^۳-۳(۴)(۶)}{۱۶}+\frac{۲}{۲}=\frac{۱۴۴}{۱۶}+۱=۹+۱\to A^۲=۱۰\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۱۰}$

۸ ـ گزینه ۴ معادله‌ی درجه‌ی دوم را مرتب می کنیم: $mx^۲+(۲m-۱)x-۵=۰$

$x_۱x_۲+x_۱+x_۲=۴\ \to\ -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=۴\to\ \frac{۱-۲m}{m}-\frac{۵}{m}=۴$

$\xrightarrow{\times m}۱-۲m-۵=۴m\to ۶m=-۴\to m=-\frac{۲}{۳}$

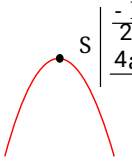
$\xrightarrow{\text{معادله}}-\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۷}{۳}x-۵=۰\to\ \Delta<۰$: غ ق ق

۹ ـ گزینه ۲

$x^۲=t\Rightarrow t^۲-(m+۲)t+m+۵=۰$ این معادله باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta > ۰\\ \frac{c}{a} > ۰\\ -\frac{b}{a} > ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^۲ + ۴ + ۴m - ۴m - ۲۰ > ۰\\ m + ۵ > ۰\\ m + ۲ > ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^۲ > ۱۶\\ m > -۵\\ m > -۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m > ۴\ ,\ m < -۴\\ m > -۵\\ m > -۲\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > ۴$$

۱۰ ـ گزینه ۲ برد تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ وقتی $a < ۰$ است به صورت $R_f = (-\infty\ ,\ \frac{۴ac - b^۲}{۴a}]$ می‌باشد.



$$\rightarrow\ R_f = (-\infty\ ,\ \frac{۴(-۱)(۲) - ۳۶}{۴(-۱)}] = (-\infty, ۱۱]$$

۱۱ ـ گزینه ۱

$$x'x'' = ۲(x' + x'') \rightarrow \frac{c}{a} = ۲(-\frac{b}{a}) \rightarrow c = -۲b \rightarrow k + ۴ = -۲k - ۲$$
$$\rightarrow ۳k = -۶ \rightarrow k = -۲ \rightarrow f(x) = -۲x^۲ - ۴x + ۱$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴(-۲)(۱) - ۱۶}{۴(-۲)} = \frac{-۲۴}{-۸} = ۳$$

۱۲ ـ گزینه ۲ برای این که نمودار تابع درجهٔ دوم f بالای محور طول‌ها قرار گیرد، باید در معادلهٔ $mx^۲ - \frac{۲}{۳}mx + ۱ = ۰$ ضریب $x^۲$ مثبت و Δ منفی باشد. پس:

$$m > ۰\ ,\ \Delta = \frac{۴}{۹}m^۲ - ۴m < ۰ \Rightarrow ۴m(\frac{۱}{۹}m - ۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۹$$

از طرف دیگر اگر $m = ۰$ آن‌گاه $f(x) = ۱$ و نمودار f بالای محور طول‌ها قرار دارد.

پس مجموعهٔ مقادیر ممکن m بازهٔ $[۰, ۹)$ است.

۱۳ ـ گزینه ۱

$$\frac{\text{وزن نمک}}{\text{وزن کل محلول}} = \text{غلظت محلول} \rightarrow \frac{\text{وزن نمک}}{۳۰۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \rightarrow \text{وزن نمک} = ۴۵kg \rightarrow \text{وزن آب} = ۳۰۰ - ۴۵ = ۲۵۵kg$$

اکنون به محلول ۲۰ کیلوگرم نمک اضافه می‌کنیم. بنابراین وزن کل محلول جدید ۳۲۰ کیلوگرم شده و مقدار نمک آن ۶۵ کیلوگرم ولی مقدار آب همان ۲۵۵ کیلوگرم است.

اگر وزن آبی که تبخیر شده است را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{\text{وزن نمک}}{\text{وزن کل محلول جدید}} = \text{غلظت محلول جدید} \rightarrow \frac{۶۵}{۳۲۰ - x} = \frac{۲۵}{۱۰۰} \rightarrow ۶۵ \times ۱۰۰ = ۲۵(۳۲۰ - x) \rightarrow ۱۳۰۰ = ۱۶۰۰ - ۵x \rightarrow x = ۶۰kg$$

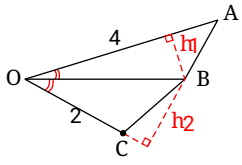
پس باید $۶۰kg$ آب تبخیر شود.

۱۴ ـ گزینه ۱ با تغییر متغیر $x^۲ - ۳x = t$ داریم:

$$۲t - \sqrt{t} = ۶ \Rightarrow ۲t - ۶ = \sqrt{t} \xrightarrow{t \geq ۳} ۴t^۲ - ۲۴t + ۳۶ = t \Rightarrow ۴t^۲ - ۲۵t + ۳۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴۹ \Rightarrow \begin{cases}t = \frac{۲۵-۷}{۸} = \frac{۹}{۴} < ۳\times\\ t = \frac{۲۵+۷}{۸} = ۴\checkmark\end{cases}$$

$$x^۲ - ۳x = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۴ \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = ۳$$

۱۵ ـ گزینه ۲



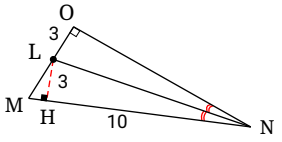
$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲}h_۱ \times OA = \frac{۱}{۲}h_۱ \times ۴ = ۶ \rightarrow h_۱ = ۳$$

نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد پس فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه می‌باشد پس $h_۱ = h_۲ = ۳$ و داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OBC}} = \frac{۱}{۲}h_۲ \times OC = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۲ = ۳$$

۱۶ ـ گزینه ۲ با توجه به تصویر نقطهٔ L روی نیمساز زاویهٔ N قرار دارد و از دو ضلع زاویه به یک فاصله می‌باشد پس داریم:

$$LO = LH = ۳$$



مساحت مثلث $\overset{\Delta}{LMN}$ برابر است با:

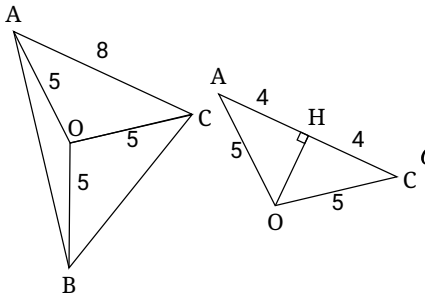
$$S_{\overset{\Delta}{LMN}} = \frac{۱}{۲} \times LH \times MN = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۰ = ۱۵$$

۱۷ - گزینه ۴ نقطهٔ O روی عمودمنصف اضلاع AB و AC و همچنین BC قرار دارد. بنابراین نقطهٔ O از سه رأس مثلث به یک فاصله است یعنی:

$$OA = OB = OC$$

$$\rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + ۱ = y - ۲ \\ y - ۲ = y - x + ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = ۷ \\ x = ۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC = ۵ \\ AC = ۸ \end{cases}$$

و در $\overset{\Delta}{OAC}$ داریم:



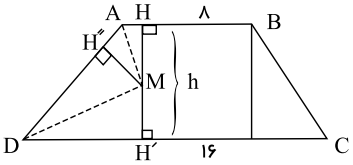
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \rightarrow ۵^۲ = OH^۲ + ۴^۲ \rightarrow OH = ۳$$

$$\rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAC}} = \frac{AC \times OH}{۲} = \frac{۸ \times ۳}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAC}} = ۱۲$$

۱۸ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ روی نیمساز زاویهٔ } M \Rightarrow MH = MH'' \\ D \text{ روی نیمساز زاویهٔ } M \Rightarrow MH' = MH'' \end{array}\right\} \Rightarrow MH = MH'' = MH''$$

ارتفاع ذوزنقه $= h = MH + MH' = ۲MH''$



در کل MH و MH' و MH'' برابر باشند.

$$S_{ABCD} = ۴۸ \rightarrow ۴۸ = \frac{(AB + CD) \times h}{۲} \Rightarrow ۴۸ = \frac{۲۴ \times h}{۲} \Rightarrow h = ۴$$

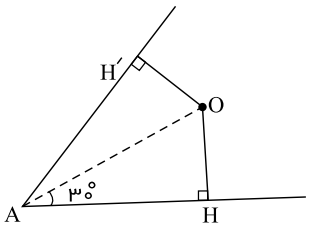
$$h = ۲MH'' \rightarrow ۴ = ۲MH'' \rightarrow MH'' = ۲$$

۱۹ - گزینه ۱ چون نقطهٔ O فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است لذا روی نیمساز زاویه A قرار دارد. پس OA نیمساز است. دو مثلث $\overset{\Delta}{AOH}$ و $\overset{\Delta}{AOH'}$ هم‌نهشت هستند.

$$S_{H'AHO} = ۲S_{\overset{\Delta}{OAH}}$$

$$OH = OA \times \sin ۳۰^\circ = OA \times \frac{۱}{۲} = ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵$$

$$AH = OA \times \cos ۳۰^\circ = ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}$$



$$S_{\overset{\Delta}{OAH}} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵\sqrt{۳} = \frac{۲۵}{۲}\sqrt{۳}$$
$$S_{AOHH'} = ۲S_{\overset{\Delta}{OAH}} = ۲ \times \frac{۲۵}{۲} \times \sqrt{۳} = ۲۵\sqrt{۳}$$

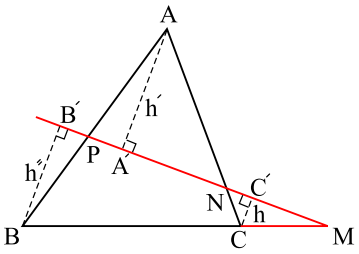
۲۰ - گزینه ۳ از ترکیب در صورت و مخرج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_۱}{۱} = \frac{a_۲}{۲} = \frac{a_۳}{۳} = \cdots = \frac{a_n}{n} \Rightarrow \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{۱ + ۲ + \cdots + n} = \frac{a_۱}{۱}$$

حال با توجه به رابطه‌ی $۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$، داریم:

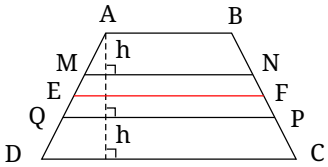
$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} a_۱$$

۲۱ - گزینه ۱ با توجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:



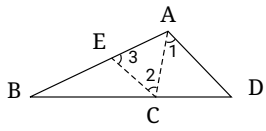
$$\begin{matrix} CC' \parallel BB' \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{h''}{h} \\ CC' \parallel AA' \Rightarrow \frac{CN}{AN} = \frac{h}{h'} \end{matrix} \Rightarrow \frac{BM}{CM} \times \frac{CN}{AN} = \frac{h''}{h'} = \frac{BP}{AP}$$

۲۲ - گزینه ۱ نقاط E و F که اوساط دو ساق BC و AD می‌باشند را به هم وصل می‌کنیم. واضح است E و F اوساط ساق‌های NP و MQ از ذوزنقهٔ $MNPQ$ نیز می‌باشند. بنابراین داریم:



$$EF = \frac{AB + CD}{۲} = \frac{MN + PQ}{۲}$$
$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{MN+PQ}{۲} \times h}{\frac{AB+CD}{۲} \times ۳h} = \frac{EF \times h}{EF \times ۳h} = \frac{۱}{۳}$$

۲۳ - گزینه ۳ از قضیه‌ی تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:



$$\hat{۲} = \hat{۳} \Rightarrow AE = AC = ۶$$
$$\hat{۱} = \hat{۲} \Rightarrow E \parallel AD \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE} = \frac{۱۵}{۶} = \frac{۵}{۲}$$

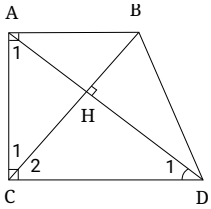
۲۴ - گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} AM \parallel DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = ۱ \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}} \frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

۲۵ - گزینه ۳ طبق تعمیم قضیهٔ تاس داریم:

$$CE \parallel AB \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۴+x} = \frac{۲}{x-۲} \Rightarrow ۴x - ۸ = ۸ + ۲x \Rightarrow ۲x = ۱۶ \Rightarrow x = ۸$$
$$\frac{x+۲}{۴} = \frac{۸+۲}{۴} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۲۶ - گزینه ۴ مثلث‌های ABD و ACD متشابه‌اند، زیرا:



$$\left.\begin{matrix}\hat{D}_1+\hat{D}_2=90^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{D}_2=90^\circ\\ \hat{A}=\hat{D}=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C}_1 \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{ACD}$$

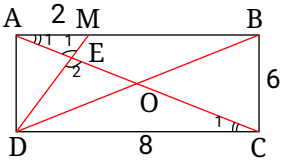
$$\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow AD^2=AB\times CD\Rightarrow AD^2=7\times 28=196\Rightarrow AD=14$$

روش دوم: نکته: اگر دو قطر ذوزنقه بر هم عمود باشند، ارتفاع واسطه‌ی هندسی بین دو قاعده است.

در ذوزنقه‌ی قائم الزاویه ارتفاع همان ساق قائم است.

$$AD^2=AB\times DC\to AC^2=7\times 28\to AD=14$$

۲۷ ـ گزینه ۱



$$AC^2=AD^2+DC^2=6^2+8^2=100\to AC=10\ ,\ AO=OC=5$$

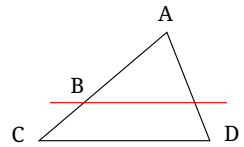
$$\left.\begin{matrix}AB\parallel DC\ ,\ AC=\text{مورب}\to \hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \text{(متقابل به رأس)}\ \hat{E}_1=\hat{E}_2\end{matrix}\right\}\to \overset{\Delta}{AME}\sim\overset{\Delta}{EDC}$$

$$\to \frac{AM}{CD}=\frac{AE}{EC}\to \frac{2}{8}=\frac{AE}{EC}\to \frac{2}{8}=\frac{AO-EO}{OC+EO}\to \frac{2}{8}=\frac{5-EO}{5+EO}$$

$$\to 10+2EO=40-8EO\to 10EO=3\to EO=3$$

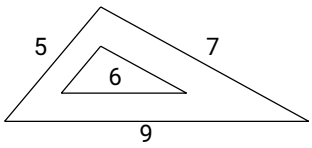
۲۸ ـ گزینه ۱

$$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{AB}{AB+BC}=\frac{3}{3+2}\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$$



نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{9}{25}$ یا مساحت مثلث کوچکتر ۳۶ درصد مساحت مثلث بزرگتر است.

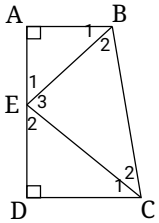
۲۹ ـ گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر را S و مساحت مثلث کوچک‌تر را S' بنامیم، داریم:



$$\to \frac{S}{S'}=\underbrace{K^2}_{\text{نسبت تشابه}}\to \frac{S}{S'}=(\frac{9}{6})^2=\frac{9}{4}$$

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک‌تر}}=\frac{S-S'}{S'}\overset{\text{تفکیک}}{=\!=\!=}\frac{S}{S'}-1=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}=1/25$$

۳۰ ـ گزینه ۱



$$\left.\begin{matrix}\widehat{B}_1+\widehat{B}_2+\widehat{C}_1+\widehat{C}_2=180^\circ\Rightarrow 2\widehat{B}_2+2\widehat{C}_2=180^\circ\\ \Rightarrow \widehat{B}_2+\widehat{C}_2=90^\circ\Rightarrow \widehat{E}_3=90^\circ\\ \widehat{E}_1+\widehat{E}_2=90^\circ\\ \widehat{E}_1+\widehat{B}_1=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \widehat{B}_1=\widehat{B}_2=\widehat{E}_2$$

به همین طریق می‌توان نشان داد که $\widehat{C}_1=\widehat{E}_1=\widehat{C}_2$.

یعنی سه مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ و $\overset{\Delta}{EBC}$ و $\overset{\Delta}{EDC}$ متشابهند پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{EBC}\Rightarrow \frac{AB}{EB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow BE^2=AB\cdot BC\quad (1)$$

تکالیف نوروز درس ریاضی یازدهم تجربی

$$\overset{\Delta}{EDC} \sim \overset{\Delta}{BEC} \Rightarrow \frac{BC}{EC} = \frac{EC}{DC} \Rightarrow EC^{۲} = BC \cdot DC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} \underbrace{BE^{۲} + EC^{۲}}_{BC^{۲}} = BC(AB + DC)$$

$$\Rightarrow BC^{۲} = BC(AB + DC) \Rightarrow BC = AB + DC$$

۳۱ ـ گزینه ۲ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است.

نسبت مساحت‌ها $= \frac{۲}{۳} \times$ نسبت اضلاع $\rightarrow k^{۲} = \frac{۲}{۳}k \rightarrow k = \frac{۲}{۳} \rightarrow$ نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر $= \frac{۳}{۲}$

پس: $\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$

۳۲ ـ گزینه ۳

اگر $x^{۲} + ۲x$ را مساوی ۵ قرار دهیم پیدا کردن x به روش دلتا منجر به بدست آوردن x های رادیکالی می شود که محاسبه، سخت می‌شود پس سعی می‌کنیم با توجه به ورودی تابع f که برابر $x^{۲} + ۲x$ است، در طرف دوم تساوی نیز عبارت $x^{۲} + ۲x$ را ایجاد کنیم.

$$\frac{x^{۴} + ۴ + ۴x^{۲} - ۴x^{۲}}{x^{۲} - ۲x + ۲} = \frac{(x^{۲} + ۲)^{۲} - ۴x^{۲}}{(x^{۲} - ۲x + ۲)} = \frac{(x^{۲} + ۲ - ۲x)(x^{۲} + ۲ + ۲x)}{(x^{۲} - ۲x + ۲)} = x^{۲} + ۲x + ۲$$

$$\rightarrow f(x^{۲} + ۲x) = x^{۲} + ۲x + ۲ \Rightarrow f(t) = t + ۲ \rightarrow f(۵) = ۵ + ۲ = ۷$$

۳۳ ـ گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{۳x^{۲} - ۶x + ۳ + ۴}{x^{۲} - ۲x + ۱} = ۳ + \frac{۴}{(x-۱)^{۲}}$$

چون $\frac{۴}{(x-۱)^{۲}} > ۰$ پس:

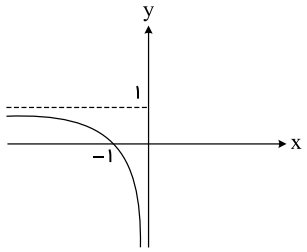
$$۳ + \frac{۴}{(x-۱)^{۲}} > ۳ \Rightarrow y > ۳ \Rightarrow R = (۳, +\infty)$$

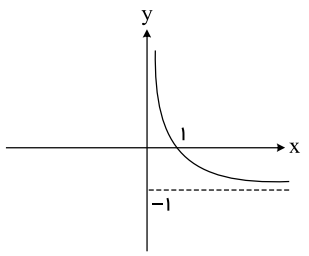
پس برد تابع شامل عدد ۳ نیست.

۳۴ ـ گزینه ۱ ابتدا ضابطه (های) تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

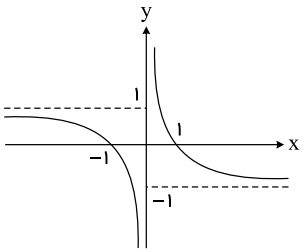
$$y = \begin{cases} \frac{۱}{x} + ۱ & , \quad x < ۰ \\ \frac{۱}{x} - ۱ & , \quad x > ۰ \end{cases}$$

برای $x < ۰$، نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را یک واحد به بالا و برای $x > ۰$ نیز نمودار $y = \frac{۱}{x}$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.





بنابراین نمودار تابع به‌صورت زیر است.



۳۵ ـ گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»:

$$f(x)=\frac{x^۲-۹}{x+۳}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$$
$$g(x)=x-۳\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$D_f\neq D_g$ پس دو تابع برابر نیستند.

گزینهٔ «۲»:

$$f(x)=\frac{x^۳-۱}{x-۱}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$g(x)=x^۲+x+۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$D_f\neq D_g$ پس دو تابع برابر نیستند.

گزینهٔ «۳»:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\\ x\neq ۱\end{cases}\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)-\{۱\}$$
$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$

$D_f\neq D_g$ پس دو تابع برابر نیستند.

گزینهٔ «۴»:

$$f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}\Rightarrow x^۲+۲x+۴=۰\Rightarrow\Delta=۴-۱۶=-۱۲<۰$$

$x^۲+۲x+۴=۰$ ریشه ندارد. پس $D_f=\mathbb{R}$ است.

$$g(x)=x-۲\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f=D_g=\mathbb{R}$$
$$f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}=\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{x^۲+۲x+۴}=x-۲=g(x)$$

پس توابع f و g برابرند.

۳۶ ـ گزینه ۴

توجه کنیم که $۰\leq x-[x]<۱$ است، پس $-۱<[x]-x\leq ۰$ بوده و چون زیر رادیکال صورت باید نامنفی باشد پس $[x]-x=۰$ بوده و $x\in\mathbb{Z}$ است یا به عبارتی $x-[x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ (۰,۱) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}[x]+[-x]\neq ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\ (۱)\\ -۱<[x]-x\leq ۰\Rightarrow[x]-x=۰\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\quad (۲)\end{matrix}\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}\varnothing$$

۳۷ ـ گزینه ۱

$$\xrightarrow{-۱<۴} f(-۱)=\frac{۱}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{x=۴} f(۴)=\sqrt{۴-۲}=\sqrt{۲}$$

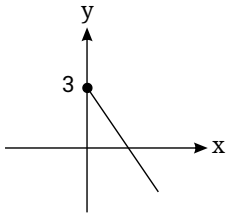
$$\xrightarrow{\sqrt{۴۰}>۴} f(\sqrt{۴۰}) = [\sqrt{۴۰}] + ۱$$

$$\xrightarrow{۶<\sqrt{۴۰}<۷} f(\sqrt{۴۰}) = ۶ + ۱ = ۷$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = -\frac{۱}{۲} + ۷ - \sqrt{۲} = ۶٫۵ - \sqrt{۲}$$

۳۸ ـ گزینه ۱

تابع f را برای $x \geq ۰$ رسم می‌کنیم، داریم:



نمودار تابع $x^۲ - ۲x + k$ سهمی رو به بالاست پس باید کم‌ترین مقدار آن بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد.

$$y = x^۲ - ۲x + k = x^۲ - ۲x + ۱ + k - ۱ = (x-۱)^۲ + (k-۱)$$

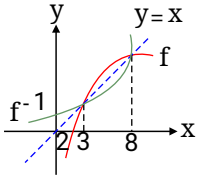
کم‌ترین مقدار این تابع در نقطهٔ مرزی $x = ۰$ اتفاق می‌افتد.

$$\to (۰-۱)^۲ + k - ۱ \geq ۳ \to ۱ + k - ۱ \geq ۳ \to k \geq ۳$$

۳۹ ـ گزینه ۳ تابع پله‌ای یک‌به‌یک نیست، چون دارای تعدادی خط افقی است.

۴۰ ـ گزینه ۴ برای به‌دست آوردن دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

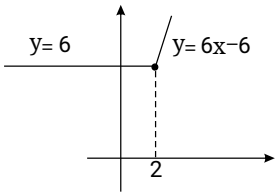
$$x - f^{-۱}(x) \geq ۰ \to x \geq f^{-۱}(x)$$



نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x \geq f^{-۱}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y = x$ بزرگ‌تر مساوی تابع $f^{-۱}$ باشد یعنی $[۳, ۸]$.

۴۱ ـ گزینه ۲ ابتدا بهتر است که تابع f را به صورت چند ضابطه بنویسیم

$$f(x) \begin{cases} ۶ & x < ۲ \\ ۶x - ۶ & x \geq ۲ \end{cases}$$



باتوجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $[۲, +\infty)$ وارون‌پذیر است.

$$y = f(x) = ۶x - ۶ \xrightarrow{\text{وارون}} x = ۶y - ۶ \to y = \frac{x+۶}{۶}$$

$$D_f = [۲, +\infty) \qquad D_{f^{-۱}} = [۶, +\infty)$$
$$R_f = [۶, +\infty) \qquad R_{f^{-۱}} = [۲, +\infty)$$

۴۲ ـ گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y = f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۱)^۲ - ۱ - ۳ = (x-۱)^۲ - ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ = y + ۴$$

$$\xrightarrow{x \geq ۱} x - ۱ = \sqrt{y+۴} \Rightarrow x = ۱ + \sqrt{y+۴} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{x+۴}$$

حال با خط $g(x) = \frac{x-a}{۲}$ قطع می‌دهیم:

$$f^{-۱}(x) = g(x) \Rightarrow ۱ + \sqrt{x+۴} = \frac{x-۹}{۲} \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} x = ۲۱$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x+۱۶=x^۲+۱۲۱-۲۲x \Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲۱ & \text{ق ق} \\ x=۵ & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

۴۳ ـ گزینه ۲

$$x\in[-۱,۱] \to ۲x-۳<۰ \to f(x)=-۲x+۳+۱$$

$$\to f(x)=-۲x+۴\ ,\ D_f=[-۱,۱]\ ,\ R_f=[۲,۶]$$

$$\to y=-۲x+۴ \to ۲x=-y+۴ \to x=-\frac{۱}{۲}y+۲ \xrightarrow[\text{عوض می‌شود}]{y,x \text{ جای}} f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در نتیجه داریم:

$$f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲\ ,\ D_{f^{-۱}}=[۲,۶]$$

دامنهٔ تابع معکوس $(f^{-۱})$ = بُرد تابع f

۴۴ ـ گزینه ۲ ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۳ & ;\ -۲\le x<-۱ \\ \frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} & ;\ -۱\le x<۲ \end{cases}$$

حال برای وارون تابع f داریم:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۳}x-۱ & ;\ -۳\le x<۰ \\ ۳x-۱ & ;\ ۰\le x<۱ \end{cases}$$

دقت کنید که بازه‌های دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ را از روی برد تابع f به‌دست آورده‌ایم. حال داریم:

$$D_g=D_f\cap D_{f^{-۱}}=D_f\cap R_f=[-۲,۲)\cap[-۳,۱)=[-۲,۱)$$

$$g(-۱)=f(-۱)+f^{-۱}(-۱)=۰+\left(-\frac{۱}{۳}-۱\right)=-\frac{۴}{۳}$$

۴۵ ـ گزینه ۴ زیر هر دو رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$x^۲-x-۲\ge ۰ \to (x-۲)(x+۱)\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le -۱\ x\ge ۲ (I)$$
$$۲-x\ge ۰ \to x\le ۲\ \ (II)$$

از اشتراک I , II نتیجه می‌شود $x\le -۱$ یا $x=۲$ یعنی $x\in(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$.

۴۶ ـ گزینه ۲ چون $D_{f-g}=\{۱,۳\}$ پس ۳ و ۱ حتماً در دامنهٔ g هستند. همچنین ممکن است دامنهٔ g شامل عضوهای دیگری هم باشد.

$$(۱,-۴)\in f-g \Rightarrow (f-g)(۱)=-۴ \Rightarrow f(۱)-g(۱)=-۴ \Rightarrow ۴-g(۱)=-۴ \Rightarrow \boxed{g(۱)=۸}$$

$$(۳,۱)\in f-g \Rightarrow (f-g)(۳)=۱ \Rightarrow f(۳)-g(۳)=۱ \Rightarrow ۴-g(۳)=۱ \Rightarrow \boxed{g(۳)=۳}$$

$$\Rightarrow g(۱)-۲g(۳)=۸-۶=۲$$

۴۷ ـ گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{-۲x+۶} \to -۲x+۶\ge ۰ \to ۶\ge ۲x \to ۳\ge x$$
$$\to D_f=(-\infty,۳]=(-\infty,a] \to \boxed{a=۳}$$
$$(f-g)(a) \overset{a=۳}{=\!=} (f-g)(۳)=f(۳)-g(۳)=\sqrt{-۲(۳)+۶}-|۲(۳)-۳|$$
$$=\sqrt{-۶+۶}-|۶-۳|=\sqrt{۰}-|۳|=۰-۳=-۳$$

۴۸ ـ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & ,-۲\le x\le ۰\\ ۲ & ,۰<x\end{cases}\quad,\quad g(x)=-x\ ,\ x\le ۰$$

($g(x)$ یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y=x+۲$ عمود است، یعنی شیبش -۱ است.)

دامنهٔ : $D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)\cap(-\infty,۰]\to D_{f+۲g}=[-۲,۰]$

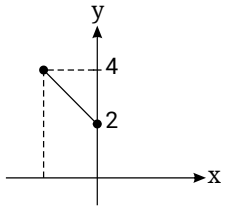
برای محاسبهٔ برد داریم:

$$(f+۲g)(x)=(x+۲)+۲(-x)=x+۲-۲x\Rightarrow(f+۲g)(x)=-x+۲$$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

$$(f+۲g)(-۲)=۴\quad,\quad(f+۲g)(۰)=۲\to R_{f+۲g}=[۲,۴]$$

و شکل آن بدین صورت است:



۴۹ ـ گزینه ۲ برای یافتن ضابطهٔ تابع f، معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,۱)$ و $O(۰,۰)$ را می‌یابیم.

$$m_{AO}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۱-۰}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-۰=\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow y=f(x)=\frac{۱}{۲}x\ ,\ x\le ۲$$

همچنین برای یافتن ضابطه تابع g، معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $B(-۱,-۳)$ و $C(۲,۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۰-(-۳)}{۲-(-۱)}=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow y-۰=۱\times(x-۲)\Rightarrow g(x)=x-۲,x>-۱$$

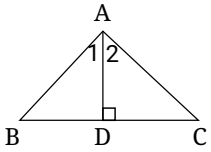
تابع $f-g$ به‌صورت زیر است:

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=(-۱,۲]$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{۲}x-(x-۲)=-\frac{۱}{۲}x+۲,-۱<x\le ۲$$

۵۰ ـ گزینه ۴

برای زاویه $\hat{A}_۲$:



$$\tan\hat{A}_۲=\frac{CD}{AD}=\sqrt{۳}\to\hat{A}_۲=۶۰$$

یا می‌توان نوشت:

$$\frac{AC}{AD}=۲\to\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\hat{A}_۲=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۲}\to\hat{A}_۲=۶۰^\circ$$

برای زاویه $\hat{A}_۱$:

$$\frac{AB}{AD}=\sqrt{۲}\to\frac{AD}{AB}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\hat{A}_۱=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\hat{A}_۱=۴۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{c}\hat{A}_۲=\hat{۶۰}\to\hat{C}=۳۰^\circ\\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۴۵+۶۰=۱۰۵\end{array}\right\}\to\frac{B\hat{A}C}{A\hat{C}D}=\frac{۱۰۵}{۳۰}=\frac{۷}{۲}$$

۵۱ ـ گزینه ۲ نکتهٔ اصلی حل مسئله این است که مسیر طی شده به‌وسیلهٔ هر دو چرخ با هم برابر است.

$$\ell_۱=\ell_۲\to r_۱\theta_۱=r_۲\theta_۲$$

کافیست زاویه برحسب رادیان بیان شود.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R_۱}{\pi}\rightarrow\frac{۷۰}{۱۸۰}=\frac{R_۱}{\pi}\rightarrow R_۱=\frac{۷\pi}{۱۸}(rad)$$

اطلاعات مطرح شده را جایگذاری می‌نمائیم.

$$r_۱\theta_۱=r_۲\theta_۲\rightarrow ۱۰۰\times\frac{۷\pi}{۱۸}=۱۲۰\times\theta_۲\Rightarrow\theta_۲=\frac{۳۵\pi}{۱۰۸}(rad)$$

۵۲ - گزینه ۱ کل محیط چرخ و فلک ۲π رادیان می‌باشد که به ۱۲ قسمت برابر تقسیم شده، پس طول هر قطعه برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$$

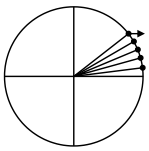
فاصلهٔ بین نقطهٔ P و نقطهٔ M هفت قطعه است. پس زاویهٔ طی شده به‌وسیلهٔ کابین برابر است:

$$\theta=۷\times\frac{\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۶}$$

حال طول کمان برابر است با:

$$\ell=r\cdot\theta\rightarrow L=۲۰\times\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۷۰\pi}{۳}m$$

۵۳ - گزینه ۴ در قدم اول زاویهٔ بین دو کابین متوالی را شناسایی می‌نماییم.



$$\alpha=\frac{۲\pi}{۳۶}=\frac{\pi}{۱۸}$$

حال میزان دوران را به فرم دیگری می‌نویسیم که بر حسب $\frac{\pi}{۱۸}$ تنظیم شده باشد:

$$\frac{۱۱\pi}{۳}=\frac{۶\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi+\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi+۳۰\times\frac{\pi}{۱۸}$$

بنابراین کابین پنجم ابتدا یک دوران کامل انجام می‌دهد تا به جای اولیهٔ خود برگردد. سپس به اندازهٔ ۳۰ کابین جابه‌جا می‌شود.

بنابراین کابین شمارهٔ ۵ در موقعیت کابین $۵+۳۰=۳۵$ قرار می‌گیرد.

۵۴ - گزینه ۳ به بررسی عبارت‌های داده شده می‌پردازیم:

الف) یک رادیان تقریباً برابر با ۵۷° است، پس دو زاویهٔ دیگر بزرگ‌تر از ۵۷° خواهند بود، پس قاعده کوچکتر از ساق‌ها است.

ب) درست است. زیرا $\frac{۲\pi}{۵}=۷۲^\circ$ و $\frac{\pi}{۵}=۳۶^\circ$

اندازهٔ زاویهٔ سوم برحسب درجه $=۱۸۰^\circ-(۷۲^\circ+۳۶^\circ)=۷۲^\circ$

پ) درست است.

ت) درست است.

۵۵ - گزینه ۱ با توجه به رابطهٔ زیر می‌توان اندازهٔ زاویه برحسب درجه را به اندازهٔ آن برحسب رادیان تبدیل کرد.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{-۳۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=-\frac{۱۶}{۹}\pi$$

۵۶ - گزینه ۳

گزینهٔ ۱ : $\frac{\pi}{۵}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۳۶^\circ$, $\frac{۲\pi}{۵}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۷۲^\circ$

$\Rightarrow ۳۶^\circ+۷۲^\circ+۷۲^\circ=۱۸۰^\circ$

گزینهٔ ۲ : $\frac{\pi}{۱۲}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۱۵^\circ$, $\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۹۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۵^\circ+۹۰^\circ+۷۵^\circ=۱۸۰^\circ$

گزینهٔ ۳ : $\frac{۵\pi}{۹}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۱۰۰^\circ$, $\frac{۷\pi}{۱۸}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۷۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۰۰^\circ + ۷۰^\circ + ۲۰^\circ = ۱۹۰^\circ > ۱۸۰^\circ$ نادرست

گزینهٔ ۴ : $\frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۱۲۰^\circ$, $\frac{\pi}{۶} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۳۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

تذکر: برای محاسبهٔ زاویه برحسب درجه کافی است زاویه برحسب رادیان را در $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ ضرب کنیم.

۵۷ ـ گزینه ۴

$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

$\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x = ۱ - \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۹} \to \sin x = \pm\frac{۲}{۳} \xrightarrow{x \text{ در ربع اول}} \sin x = \frac{۲}{۳}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۵۸ ـ گزینه ۲ روابط مورد نیاز

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

* در قدم اول باید با استفاده از اتحاد چاق و لاغر صورت کسر را تجزیه نمائیم تا به توان ۲ تبدیل شود:

$\frac{\cos^۳\alpha - \sin^۳\alpha}{۱ + \sin\alpha\cos\alpha} =$

$\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)}{۱ + \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cancel{۱ + \sin\alpha\cos\alpha})}{\cancel{۱ + \sin\alpha\cos\alpha}} = \cos\alpha - \sin\alpha$

روش دوم: می‌توان با جایگذاری یک کمان مناسب مانند $\alpha = ۰$ در عبارت اصلی و گزینه‌ها، گزینه‌ی مناسب را یافت.

$\frac{\cos^۳(۰) - \sin^۳(۰)}{۱ + \sin(۰)\cos(۰)} = ۱$ گزینه دو : $\cos(۰) - \sin(۰) = ۱$

۵۹ ـ گزینه ۱ روابط مورد نیاز:

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$, اتحاد فرعی: $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$

برای محاسبه ابتدا از اتحاد فرعی استفاده می‌نمائیم:

$\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = \frac{۱}{۲} \to (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۲}$

$۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۲} \to ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۲} \to \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴}$

حال با همان اتحاد فرعی خواستهٔ مسئله را بازنویسی می‌نمائیم:

$\sin^۸\alpha + \cos^۸\alpha = (\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha)^۲ - ۲\sin^۴\alpha\cos^۴\alpha = (\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha)^۲ - ۲(\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha)^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ - ۲(\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۸}$

۶۰ ـ گزینه ۲ برای محاسبهٔ مقدار عبارت مطرح شده باید با استفاده از روابط مثلثاتی و پروسهٔ ساده سازی عبارت $\sin x \cdot \cos x$ را بسازیم:

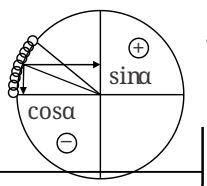
$A = \sin x + \cos x \xrightarrow{(\,)^۲} A^۲ = (\sin x + \cos x)^۲$

$\to A^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x\cos x \xrightarrow{\sin x\cdot\cos x = -\frac{۱}{۴}}$

$A^۲ = ۱ + ۲(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲} \to A = \pm\sqrt{\frac{۱}{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

برای تعیین علامت مثبت یا منفی به محدودهٔ کمان توجه نمایید:

$|\cos\alpha| > |\sin\alpha| \to \sin\alpha + \cos\alpha < ۰$



پس مقدار منفی قابل قبول است.

۶۱ ـ گزینه ۱ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

$$۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

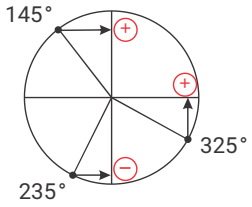
$$=۲(۲\sin a\cos a)(۲\sin b\cos b)=۲\sin ۲a\sin ۲b$$

$$\xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{۴}} ۲\sin ۲a\sin ۲(\frac{\pi}{۴}-a)=۲\sin ۲a\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)=۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۴a$$

۶۲ ـ گزینه ۱ ابتدا باید یک کمان مشترک بین همهٔ زوایای مطرح شده بیابیم:

$$\frac{\sin(۱۴۵^\circ)-\sin(۲۳۵^\circ)}{\cos(۳۲۵^\circ)}=\frac{\sin(۱۸۰^\circ-۳۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۳۵^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ-۳۵^\circ)}$$

پس ناحیهٔ هر کمان و علامت نسبت مثلثاتی را تعیین می‌نمائیم:



$$=\frac{+\sin ۳۵^\circ+\cos ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}=\frac{\sin ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}+\frac{\cos ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}=\tan ۳۵^\circ+۱$$

$$\xrightarrow{\tan ۳۵^\circ=x^۲-۱} x^۲-۱+۱=x^۲$$

۶۳ ـ گزینه ۳

$$\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\cot\theta=-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{\sin(\pi-\theta)+۲\cos(\pi+\theta)}{۲\sin(۲\pi-\theta)+\cos(۲\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-۲\cos\theta}{-۲\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{۲\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{-۲\sin\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{۱-۲\cot\theta}{-۲+\cot\theta}$$

$$=\frac{۱-۲(-\frac{۱}{۲})}{-۲+(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{-\frac{۵}{۲}}=-\frac{۴}{۵}$$

۶۴ ـ گزینه ۴

$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}\quad(۱)$$

$$\cos ۲۴۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)=-\cos ۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}\quad(۲)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow\sin ۲۱۰^\circ+\cos ۲۴۰^\circ=-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=-۱$$

۶۵ ـ گزینه ۳ با توجه به رابطهٔ $\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x$، اگر $\sin\alpha=\cos\beta$ می‌توان گفت: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ است.

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۹}+\frac{۲\pi}{۹}+x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲x+\frac{۳\pi}{۹}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۹})=\cos(\frac{۲\pi}{۹}+x)$$

تذکر: به جای x مقادیر دیگری نیز می‌توان به‌دست آورد.

۶۶ ـ گزینه ۳

نکته : $\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha \ , \ \tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha$

نکته : $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

زاویه‌ها را بر حسب زاویه‌های کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{۲}\sin(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴})-\sqrt{۳}\tan(\frac{۳۰\pi+\pi}{۶})$$
$$=\sqrt{۲}\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۳}\tan(۵\pi+\frac{\pi}{۶})$$
$$=\sqrt{۲}\sin(۲\pi+\pi+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۳}\tan(\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۲}\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۳}\tan\frac{\pi}{۶}$$
$$=-\sqrt{۲}\sin\frac{\pi}{۴}-\sqrt{۳}\tan\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۲}{۲}-\frac{۳}{۳}=-۲$$

۶۷ ـ گزینه ۴ ابتدا $f(x_۱+x_۲)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x_۱+x_۲)=k(b)^{x_۱+x_۲+۱}=k\times b^{x_۱+۱+x_۲+۱-۱}$$

$$=k\ b^{x_۱+۱}\times b^{x_۲+۱}\times b^{-۱}=\underbrace{k\,b^{x_۱+۱}}_{f(x_۱)}\times\underbrace{k\,b^{x_۲+۱}}_{f(x_۲)}\times\frac{۱}{k}\times b^{-۱}$$

$$=f(x_۱)\times f(x_۲)\times\frac{۱}{k}\times\frac{۱}{b}=\frac{f(x_۱)\,f(x_۲)}{kb}$$

۶۸ ـ گزینه ۳ منحنی از نقطه‌ای به مختصات $(۰\ ,۴)$ عبور می‌نماید، لذا مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌نماید.

$$x=۰\to y=a(\sqrt{۲})^{۰}+۱=۴\to a=۳\to f(x)=۳(\sqrt{۲})^{bx}+۱$$

با توجه به اینکه نمودار اکیداً صعودی است پس پایهٔ تابع نمایی باید بزرگتر از یک باشد. برای درستی این مطلب پارامتر b باید مثبت باشد.

۶۹ ـ گزینه ۲ نکته: در نامعادلات نمایی داریم:

$$a^x<a^y\Rightarrow\begin{cases}x<y & a>۱\\ x>y & ۰<a<۱\end{cases}$$

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{x-۱}>\frac{۸}{۱۰۰}\Rightarrow(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{x-۱}>\frac{۲}{۲۵}\Rightarrow(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{x-۱}>(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{۲}\xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{۰<\frac{\sqrt{۲}}{۵}<۱}x-۱<۲\to x<۳$$

که جواب نامعادله شامل دو عدد طبیعی می‌باشد $(x=۱\ ,۲)$.

۷۰ ـ گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲۷}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}})^{x}=\sqrt{۲۷}(\frac{\sqrt{۳}}{۲۴۳})^{۳-x}\to\frac{۳^{\frac{۱}{۲}}}{۳^{۳}}(۳^{-\frac{۱}{۳}})^{x}=۳^{\frac{۳}{۲}}(\frac{۳^{\frac{۱}{۲}}}{۳^{۵}})^{۳-x}$$

$$\to۳^{-\frac{۵}{۲}}\times۳^{-\frac{x}{۳}}=۳^{\frac{۳}{۲}}(۳^{-\frac{۹}{۲}})^{۳-x}\to۳^{-\frac{۵}{۲}-\frac{x}{۳}}=۳^{\frac{۳}{۲}}\times۳^{\frac{۹x-۲۷}{۲}}$$

$$\to۳^{\frac{۱۵-۲x}{۶}}=۳^{\frac{۹x-۲۴}{۲}}\to\frac{-۱۵-۲x}{۶}=\frac{۹x-۲۴}{۲}$$

$$\to۳(۹x-۲۴)=-۱۵-۲x\to۲۷x-۷۲=-۱۵-۲x\to۲۹x=۵۷\to x=\frac{۵۷}{۲۹}$$

۷۱ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_a^A\geq m\xrightarrow{a>۱}A\geq a^m$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline \frac{x-1}{x+1} > 0 & & + & \text{ن} & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < -1 \\ \log_3^{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

۷۲ ـ گزینه ۴ باتوجه به وجود دو عبارت قرینهٔ تعیین دامنهٔ تابع به حل مسئله کمک می‌نماید.

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}}^{(\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+81)}$$

$$\begin{matrix} (I)\, x-3 \geq 0 \to x \geq 3 \\ (II)\, 3-x \leq 0 \to x \leq 3 \end{matrix} \quad (I) \cap (II) \to D_f = \{3\}$$

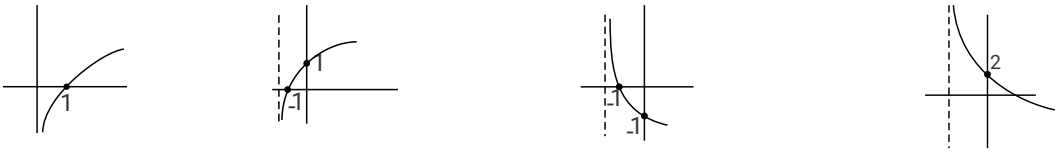
برای محاسبه کافیست $f(3)$ را محاسبه نمائیم.

$$f(3) = \log_{\sqrt{3}}^{81} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^4} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

پس می‌توان گفت:

$$R_f = \{8\}$$

۷۳ ـ گزینه ۳ برای رسم ابتدا باید نمودار $y = \log_2^x$ رسم نماییم.



$y = \log_2^x$ $\quad y = \log_2^{(x+2)}$ $\quad y = -\log_2^{(x+2)}$ $\quad y = -\log_2^{(x+2)} + 3$

۷۴ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b N = x \xrightarrow{\text{تعریف}} b^x = N \;\;,\;\; \log_{k^m} a^n = \frac{n}{m}\log_k a}$

$$\log_2 x = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 2^2 \;,\; \log_{\sqrt{2}} y = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تعریف}} y = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$$

$$\log_{xy} 2\sqrt{2} = \log_{2^2 \times 2^{\frac{1}{4}}} 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = \log_{2^{\frac{9}{4}}} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

۷۵ ـ گزینه ۲ برای محاسبه کافیست $t = 6$ را در تابع جایگذاری نماییم.

$$f(6) = 100 - 20\log_2^8 \to f(6) = 100 - 20 \times 3 = 40\%$$

۷۶ ـ گزینه ۳

$$\log(x+4) = \log\sqrt{2x+11} \to x+4 = \sqrt{2x+11}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + 16 + 8x = 2x + 11 \to x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\to (x+1)(x+5) = 0 \to \begin{cases} x = -1 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{جلوی لگاریتم را منفی می کند و غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

۷۷ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \;\;,\;\; \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\log(2^x + 8) = \log 2 + \log 2^x \to \log(2^x + 8) = \log 2 \times 2^x \to \log(2^x + 8) = \log 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} = 2^x + 8 \Rightarrow 2^{x+1} - 2^x = 8 \Rightarrow 2^x(2^1 - 1) = 8$$

$$\Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{\log_x^3 + 3}{\log_3^x + 1} \xrightarrow{x=3} \frac{1+3}{1+1} = 2$$

۷۸ ـ گزینه ۳

$$\log_{۲}^{(x+۲)}+\log_{۲}^{(x-۲)}=\log_{۲}^{(x+۲)(x-۲)}=\log_{۲}^{(x^{۲}-۴)}$$

با توجه به فرمول $a^{\log_a^x}=x$ داریم:

$$۳^{\frac{۱}{۲}\log^{۳x}\sqrt{۳}}=۳^{\log_{۳}^{۳x}}=۳x \quad (۱)$$

$$۲^{\log_{۲}^{(x^{۲}-۴)}}=(x^{۲}-۴) \quad (۲)$$

با جایگذاری (۱) و (۲) در معادله لگاریتمی سؤال داریم:

$$\Rightarrow ۳x=x^{۲}-۴$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \ (\text{غ ق ق}) \\ x=۴ \ (\text{ق ق}) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \log_{۲}^{(x+۴)}=\log_{۲}^{۸}=۳$$

۷۹ ـ گزینه ۴

$$\log_{۲}^{(x+۱۴)}+\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{(x+۱۴)}+\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)}=۷\Rightarrow \frac{۷}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)}=۷\Rightarrow \log_{۲}^{(x+۱۴)}=۴\Rightarrow x+۱۴=۱۶\Rightarrow x=۲$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \log_{۸}^{\sqrt{x}}\overset{x=۲}{=\!=}\log_{۸}^{\sqrt{۲}}=\log_{۲^{۳}}^{۲^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۱}}\log_{۲}^{۲}=\frac{۱}{۶}$$

۸۰ ـ گزینه ۲

$$\log_{۲۵}^{۶x+۱}=\log_{۳}^{\sqrt[۳]{۳}}-\log_{۵}^{\sqrt{x+۱}}\rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲۵}^{۶x+۱}=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۵}^{x+۱}\overset{\times ۲}{\longrightarrow}\log_{۵}^{۶x+۱}=۳-\log_{۵}^{x+۱}\rightarrow \log_{۵}^{(۶x+۱)}+\log_{۵}^{(x+۱)}=۳$$

$$\rightarrow \log_{۵}^{(۶x+۱)(x+۱)}=۳\overset{\text{تعریف}}{\longrightarrow}(۶x+۱)(x+۱)=۵^{۳}$$

$$\rightarrow ۶x^{۲}+۷x+۱=۱۲۵\rightarrow ۶x^{۲}+۷x-۱۲۴=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۲۶}{۶}\rightarrow \text{غ ق ق} \\ x=۴ \end{cases}$$

به ازای $x=-\frac{۲۶}{۶}$، $\log_{۲۵}^{۶x+۱}$ و $\log_{۵}^{\sqrt{x+۱}}$ تعریف نشده هستند.

$$x=۴\rightarrow \log_{۸}^{۳x+۴}\overset{x=۴}{=\!=}\log_{۸}^{۱۶}=\log_{۲^{۳}}^{۲^{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۸۱ ـ گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\log_b^a=k\leftrightarrow a=b^k\ ,$$

بنابراین:

$$\log_{۳}^{x^{۲}-۷x+۲۱}=۲\rightarrow x^{۲}-۷x+۲۱=۳^{۲}$$

$$x^{۲}-۷x+۱۲=۰\rightarrow (x-۳)(x-۴)=۰\rightarrow \begin{matrix} x=۳ \\ , \\ x=۴ \end{matrix}$$

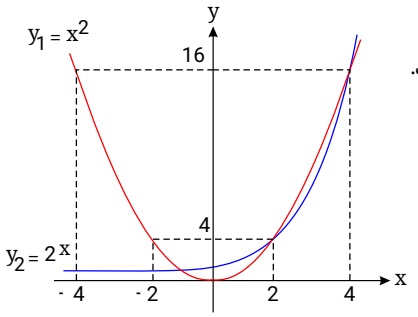
$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow \log_{۱۲۵}^{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}=\log_{۱۲۵}^{۲۵}$$

می‌دانیم: $\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$ پس:

$$\log_{۱۲۵}^{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}=\log_{۱۲۵}^{۲۵}=\log_{۵^{۳}}^{۵^{۲}}=\frac{۲}{۳}\log_{۵}^{۵}=\frac{۲}{۳}$$

۸۲ ـ گزینه ۲

نمودار دو تابع $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نامعادلهٔ $2^x \geq x^2$ تنها در بازهٔ $[2,4]$ رخ می‌دهد که 2^x بالاتر از x^2 رسم شده است و این بازه شامل ۳ عدد طبیعی ۲، ۳ و ۴ است.

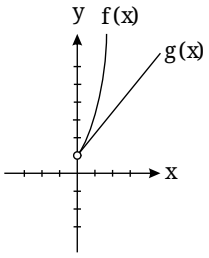
۸۳ ـ گزینه ۴

$$\log E = 11/8 + 1/5M \rightarrow E = 10^{11/8+1/5M}$$

$$\begin{cases} E_1 = 10^{11/8+1/5M} \\ E_2 = 10^{11/8+1/5(M+1)} \end{cases} \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11/8+1/5(M+1)}}{10^{11/8+1/5M}} = 10^{1/5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}$$

۸۴ ـ گزینه ۴

با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = 10^x$ و $g(x) = 1 + x$ در بازهٔ $(0, +\infty)$، نتیجه می‌شود که:

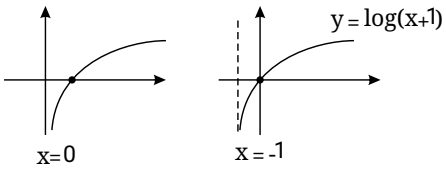


$$g(x) < f(x) \Rightarrow 1 + x < 10^x$$

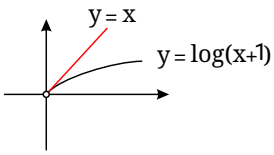
$$\Rightarrow \log(x+1) < \log 10^x \Rightarrow \log(1+x) < x$$

راه حل دوم:

برای رسیدن به گزینه هموار صحیح می‌توان از مفهوم حل نامعادله به روش هندسی استفاده کرد. در همه گزینه‌ها نمودار $y = \log^{(x+1)}$ وجود دارد. برای رسم آن، از انتقال استفاده می‌نماییم



حال اگر خط $y = x$ را رسم نماییم، برای نمودار $x > 0$ نامعادله $\log^{(x+1)} < x$ برقرار است.



۸۵ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 4} f(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x \to (-2)^+} f(x) = 0 \Rightarrow A = 1 + 4 + 0 = 5$$

۸۶ ـ گزینه ۴ با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to -1^-} |f(x)| = |-1| = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)] = [3^-] = 2$$

دقت کنید وقتی $x < 1$ است، مقدار $f(x) < 3$ است، پس $\lim_{x \to 1^-} [f(x)] = 2$ است.

پس حاصل برابر است با $0 + 1 + 2 = 3$

۸۷ ـ گزینه ۲ ابتدا باید معین کنیم جعبه مقابل f به سمت چه عددی در حال حرکت است:

$$x \to ۲^+ \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{۱}{x} \to \left(\frac{۱}{۲}\right)^- \xrightarrow{\times ۴} \frac{۴}{x} \to ۲^-$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to ۲^+} f\left(\frac{۴}{x}\right) = f\left(۲^-\right)$$

برای محاسبه حد چپ تابع باید از این ضابطه پایین استفاده کرد:

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} \sqrt{۲x} = ۲$$

۸۸ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} (۳x^۲ - ۱) = ۳ \times ۲^۲ - ۱ = ۱۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (ax - b) = ۲a - b$$

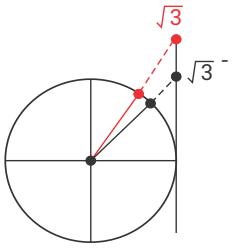
$$\xrightarrow{f \text{ در } x=۲ \text{ حد دارد}} ۲a - b = ۱۱ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x \to -۱} f(x) = ۴ \Rightarrow \lim_{x \to -۱} (ax - b) = ۴ \Rightarrow -a - b = ۴ \Rightarrow a + b = -۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} ۲a - b = ۱۱ \\ a + b = -۴ \end{cases} \Rightarrow ۳a = ۷ \Rightarrow a = \frac{۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{a+b=-۴} \frac{۷}{۳} + b = -۴ \Rightarrow b = \frac{-۱۹}{۳} \Rightarrow a - b \Rightarrow \frac{۷}{۳} - (-\frac{۱۹}{۳}) = \frac{۲۶}{۳}$$

۸۹ ـ گزینه ۲ ابتدا با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی مقدار نسبت مثلثاتی را محاسبه نماییم:



$$\tan x \to \sqrt{۳}^- \xrightarrow{\text{قدرمطلق}} |\tan x| \Rightarrow \sqrt{۳}^- \xrightarrow{(\ )^۲} \tan^۲ x \to ۳^-$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} \frac{۱}{\tan^۲ x} \to \left(\frac{۱}{۳}\right)^+ \xrightarrow{\times ۱۲} \frac{۱۲}{\tan^۲ x} \to ۴^+ \xrightarrow{[\ ]} ۴$$

۹۰ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) - \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۳ \Rightarrow (۲ + a)[۲^+] - (۲ + a)[۲^-] = ۳$$

$$\Rightarrow (۲ + a)(۲) - (۲ + a)(۱) = ۳ \Rightarrow ۴ + ۲a - ۲ - a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

۹۱ ـ گزینه ۴

$$x \to n^+ \Rightarrow [x] = n$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to n^+} \cos(\pi(x - [x])) = \lim_{x \to n^+} \cos(\pi(x - n)) = \cos(\pi(n - n)) = \cos(۰) = ۱$$

$$x \to n^- \Rightarrow [x] = n - ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to n^-} \cos(\pi(x - [x])) = \lim_{x \to n^-} \cos(\pi(x - n + ۱)) = \cos(\pi(n - n + ۱)) = \cos \pi = -۱$$

حد چپ و راست تابع در $x = n$ با هم برابر نیستند، پس تابع در $x = n$ حد ندارد.

۹۲ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۵x^۲ - ۴x - ۱۲}{۹x^۲ - ۶x - ۲۴} = \frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده باید صورت و مخرج را تجزیه نمود. برای تجزیه بر عامل $x - ۲$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{r|l} ۵x^۲ - ۴x - ۱۲ & x - ۲ \\ \hline ۵x^۲ - ۱۰x & ۵x + ۶ \\ \hline ۶x - ۱۲ \\ -\ ۶x - ۱۲ \\ \hline ۰ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۹x^۲ - ۶x - ۲۴ & x - ۲ \\ \hline ۹x^۲ - ۱۸x & ۹x + ۱۲ \\ \hline ۱۲x - ۲۴ \\ -\ ۱۲x - ۲۴ \\ \hline ۰ \end{array}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}\,(۵x+۶)}{\cancel{(x-۲)}\,(۹x+۱۲)}=\frac{۱۶}{۳۰}=\frac{۸}{۱۵}$$

۹۳ ـ گزینه ۲ اگر از سمت راست به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱>۰$ پس در نامساوی داده شده مخرج $۱-x<۰$ در نتیجه باشد $f(x)-۲>۰$ باشد در نتیجه اگر $x\to ۱^{+}$ آنگاه $f(x)\to ۲^{+}$ هم‌چنین اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱<۰$ پس $۱-x>۰$ در نتیجه در نامساوی $\frac{f(x)-۲}{۱-x}<۰$ باید $f(x)-۲<۰$ باشد، یعنی $x\to ۱^{-}$ آنگاه $f(x)\to ۲^{-}$. بنابراین گزینهٔ «۲» می‌تواند درست باشد.

۹۴ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{[x]\sqrt{۱-\cos^{۲}x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{[۳/۱۴^{+}]\sqrt{۱-\cos^{۲}x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{۳\sqrt{\sin^{۲}x}}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{۳|\sin x|}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{۳(\cancel{-\sin x})}{۲\cancel{\sin x}\cos x}=\frac{-۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

$$(x\to\pi^{+}\Rightarrow x\ \text{در ربع سوم}\Rightarrow \sin x<۰\Rightarrow|\sin x|=-\sin x)$$

۹۵ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos^{۳}(\pi-x)}=\frac{(۰)^{۲}}{۱-(۱)^{۳}}=\frac{۰}{۰}\quad,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$\longrightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos^{۳}(\pi-x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^{۲}x}{۱-(-\cos x)^{۳}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^{۲}x}{۱+\cos^{۳}x}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos^{۲}x}{۱+\cos^{۳}x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(۱-\cos x)\,\cancel{(۱+\cos x)}}{\cancel{(۱+\cos x)}\,(۱-\cos x+\cos^{۲}x)}=\frac{۱-(-۱)}{۱-(-۱)+(-۱)^{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۹۶ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin(x)}{۱+\sin x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}(۱-\sin x)=۱-(-۱)=۲$$

۹۷ ـ گزینه ۴ حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد. پس:

$$\lim_{x\to ۸}\frac{x^{۲}-۶۴}{x^{۲}-۸x}=\lim_{x\to ۸}\frac{(x-۸)(x+۸)}{x(x-۸)}=\lim_{x\to ۸}\frac{x+۸}{x}=\frac{۱۶}{۸}=۲$$

۹۸ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{۱+\sin^{۳}x}{\cos^{۲}x}=\frac{۱+(-۱)}{۰}:\frac{۰}{۰}\quad\text{ابهام}$$

$$\xrightarrow{\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x}\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{(۱+\sin x)(۱-\sin x+\sin^{۲}x)}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x+\sin^{۲}x}{۱-\sin x}=\frac{۱+۱+۱}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

۹۹ ـ گزینه ۲ تابع f در $x=۱$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=f(۱)\to ۳g(a)+۱=۳b+۱\to g(a)=b$$

از طرفی طبق تعریف تابع g داریم:

$$g(a)=\frac{b^{۲}+۲}{۳}\to\frac{b^{۲}+۲}{۳}=b\to b^{۲}-۳b+۲=۰\to\begin{cases}b=۱\\ b=۲\end{cases}\quad(۱)$$

تابع g فقط در $x=a$ می‌تواند ناپیوسته باشد، پس $a=-۱$ و داریم:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{b^{۲}+۲}{۳} & x\geq -۱\\ ۱ & x<-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{در } x=-۱\ \text{ناپیوسته}}\frac{b^{۲}+۲}{۳}\neq ۱\to b^{۲}\neq ۱\to b\neq\pm ۱\quad(۲)$$

$(۱),(۲) \rightarrow b = ۲ \rightarrow a - b = -۱ - ۲ = -۳$

۱۰۰ - گزینه ۲ به ازای $x = \frac{۱}{۴}$ عبارت $\frac{-۳}{x}$ عدد صحیح است.

$$\frac{-۳}{x} = \frac{-۳}{\frac{۱}{۴}} = -۱۲$$

عبارت $\frac{-۳}{x}$ صعودی است، پس زمانی $f(x) = [\frac{-۳}{x}]$ در بازهٔ $(\frac{۲}{۱۳} - k, \frac{۱}{۴})$ پیوسته است که به ازای $x = \frac{۲}{۱۳} - k$ عبارت $\frac{۳}{x}$ برابر -۱۳ یا بزرگتر از آن باشد و چون حداکثر k را می‌خواهیم، پس باید به ازای $x = \frac{۲}{۱۳} - k$ عبارت $\frac{-۳}{x}$ برابر -۱۳ شود.

$$-\frac{۳}{\frac{۲}{۱۳} - k} = -۱۳ \Rightarrow \frac{۲}{۱۳} - k = \frac{۳}{۱۳} \Rightarrow k = -\frac{۱}{۱۳}$$

۱۰۱ - گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$|x| < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \quad و \quad |x| \geq ۱ \Rightarrow x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x| - ۱}{|x^۲ - ۱|} + ax & , \quad -۱ < x < ۱ \\ \sin(\frac{۳\pi}{۲}x) + b & , \quad x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱ \end{cases}$$

تابع باید در $x = ۱$ و $x = -۱$ پیوسته باشد؛ بنابراین داریم:

پیوستگی در $x = ۱$:

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{|x| - ۱}{|x^۲ - ۱|} + ax = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x - ۱}{-(x^۲ - ۱)} + ax = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x - ۱}{-(x - ۱)(x + ۱)} + ax = -\frac{۱}{۲} + a \quad (۱)$$

$$f(۱) = \lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \sin(\frac{۳\pi}{۲}x) + b = -۱ + b \quad (۲)$$

$$(۱) \ , \ (۲) \Rightarrow a - \frac{۱}{۲} = -۱ + b \Rightarrow a - b = -\frac{۱}{۲} \quad (۳)$$

$$\lim_{x \to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^+} \frac{|x| - ۱}{|x^۲ - ۱|} + ax = \lim_{x \to (-۱)^+} \frac{-x - ۱}{-(x^۲ - ۱)} + ax = \lim_{x \to (-۱)^+} \frac{-(x + ۱)}{-(x - ۱)(x + ۱)} + ax = -\frac{۱}{۲} - a$$

$$f(-۱) = \lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^-} \sin(\frac{۳\pi}{۲}x) + b = ۱ + b \quad (۵)$$

$$(۴) \ , \ (۵) \rightarrow -\frac{۱}{۲} - a = ۱ + b \Rightarrow a + b = -\frac{۳}{۲} \quad (۶)$$

$$(۳) \ , \ (۶) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -\frac{۱}{۲} \\ a + b = -\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow a = -۱ \ , \ b = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳a + ۲b = -۳ - ۱ = -۴$$

۱۰۲ - گزینه ۴ برای آنکه دومین مهره‌ی سفید، بلافاصله بعد از اولین مهره‌ی سیاه خارج شود، باید مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه و مهره‌ی سوم سفید خارج شده باشند.

$$\text{احتمال مطلوب} = \underbrace{\frac{۴}{۹}}_{\substack{\text{مهره‌ی اول سفید} \\ (۴\text{سفید و } ۵\text{ سیاه})}} \times \underbrace{\frac{۵}{۹}}_{\substack{\text{مهره‌ی دوم سیاه} \\ (۴\text{سفید و } ۵\text{ سیاه})}} \times \underbrace{\frac{۴}{۸}}_{\substack{\text{مهره‌ی سوم سفید} \\ (۴\text{سفید و } ۴\text{ سیاه})}} = \frac{۱۰}{۸۱}$$

۱۰۳ - گزینه ۱ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی زمانی فرد است که هر دو عدد فرد باشند، پس داریم:

$$B = \left\{ \begin{matrix} (۱,۱),(۱,۳),(۱,۵) \\ (۳,۱),(۳,۳),(۳,۵) \\ (۵,۱),(۵,۳),(۵,۵) \end{matrix} \right\}$$

مجموع دو تاس مضرب ۳ را پیشامد A در نظر می‌گیریم:

$$A=\{(۱,۲),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۲),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴)\}$$

$$A\cap B=\{(۱,۵),(۳,۳),(۵,۱)\}\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

روش دوم: حاصل‌ضرب دو تاس فرد را فضای نمونه‌ای جدید در نظر گرفته و در این فضای نمونه‌ای، مجموع دو تاس مضرب ۳ را به دست می‌آوریم.

$$S=\left\{\begin{matrix}(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵)\\(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵)\\(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\end{matrix}\right\}\ ,\ A=\{(۱,۵),(۳,۳),(۵,۱)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

۱۰۴ - گزینه ۴

$$\underbrace{\frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳}}_{A\text{ یک دختر}}\times\underbrace{\frac{\binom{۳}{۰}}{۲^۳}}_{B\text{ بدون دختر}}+\underbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳}}_{A\text{ دو دختر}}\times\underbrace{\frac{\binom{۳}{۰}+\binom{۳}{۱}}{۲^۳}}_{B\text{, هیچ یا یک دختر}}+\underbrace{\frac{\binom{۳}{۳}}{۲^۳}}_{A\text{ سه دختر}}\times\underbrace{\frac{\binom{۳}{۰}+\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}}{۲^۳}}_{B\text{, هیچ یا یک یا دو دختر}}$$

$$=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۱}{۸}\times\frac{۷}{۸}=\frac{۲۲}{۶۴}=\frac{۱۱}{۳۲}$$

دقت کنید که اگر خانواده‌ای دارای n فرزند باشد، احتمال آن‌که دقیقاً k فرزند پسر (دختر) باشد از رابطه‌ی $P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ بدست می‌آید.

۱۰۵ - گزینه ۳ ابتدا $P(A)$ را به‌دست می‌آوریم. می دانیم $n(S)=۶\times۶=۳۶$ و $A=\{(۱,۶),(۲,۶),\cdots,(۶,۶)\}$ است.

$$n(A)=۶\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

چون دو پیشامد A و B مستقل‌اند، باید $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$.

طبق جدول زیر اگر مجموع دو تاس برابر ۷ شود، $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$ می‌شود که در رابطهٔ بالا صدق می‌کند. چون تنها حالت اشتراک A و B، $(۱,۶)$ هستند.

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۱۰۶ - گزینه ۱ روش انتخاب نمونه باید به گونه‌ای باشد که امکان انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر باشد و قبل از انتخاب نمونه، نتوانیم با اطمینان درباره‌ی حضور یا عدم حضور عده‌ای در نمونه قضاوت کنیم. بنابراین انتخاب باید به صورت تصادفی صورت گیرد.

۱۰۷ - گزینه ۴ وقتی می‌خواهیم تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم عمل سرشماری انجام می‌دهیم، در این حالت نمونه دیگر زیرمجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری نیست، بلکه برابر با خود جامعه است و در نتیجه اندازه‌ی نمونه و جامعه با هم برابر است.

۱۰۸ - گزینه ۱ چون واریانس داده‌ها برابر صفر است یعنی تمام داده‌ها با هم برابر هستند یعنی $a=b=c=۴$ است.

$$۸,c+۳,b+۲,a+۱\to ۸,۷,۶,۵\to\bar{x}=\frac{۸+۷+۶+۵}{۴}=\frac{۲۶}{۴}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

۱۰۹ - گزینه ۳ داده‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در نظر بگیرید.

$$\bar{x}=\frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{۵}((۱-۳)^۲+(۲-۳)^۲+(۳-۳)^۲+(۴-۳)^۲+(۵-۳)^۲)=\frac{۱}{۵}(۴+۱+۱+۴)=\frac{۱۰}{۵}=۲\to\sigma=\sqrt{۲}$$

حال، اگر به تمام داده‌ها k واحد اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین k واحد اضافه می‌شود.

$$C_V=\frac{\sigma}{x}\Rightarrow C_V=\frac{\sqrt{۲}}{۳+k}=\frac{\sqrt{۲}}{۵}\Rightarrow k=۲$$

۱۱۰ - گزینه ۳

$$CV=۰/۱\ ,\ \bar{x}=۴۰\to CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\to\frac{۱}{۱۰}=\frac{\sigma}{۴۰}\to\sigma=۴\ ,\ \sigma^۲=۱۶$$

$$\text{میانگین مساحت مربع‌ها}=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{n}\quad,\quad\text{طول ضلع مربع‌ها}=x$$

$\rightarrow$ می‌دانیم : $\sigma^۲ = \dfrac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_n - \bar{x})^۲}{n} = \dfrac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} - \bar{x}^۲$

$\rightarrow ۱۶ = \dfrac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} - (۴۰)^۲ \rightarrow \dfrac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} = ۱۶۰۰ + ۱۶$

$\rightarrow$ میانگین مساحت مربع‌ها $= \dfrac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} = ۱۶۱۶$

۱۱۱ - گزینه ۱ افزودن مقدار ثابت به داده‌ها تأثیری در انحراف معیار ندارد ولی میانگین به همان اندازه اضافه می‌شود. پس:

CV جدید $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{۱٫۲}{۳ + ۹} = \dfrac{۱٫۲}{۱۲} = ۰٫۱$

۱۱۲ - گزینه ۱ اگر همهٔ داده‌های آماری با هم برابر باشند، آنگاه واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات (شاخص‌های پراکندگی) برابر با صفر خواهند بود. چون ضشریب تغییرات داده‌های $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_۸ = ۲$ برابر صفر می‌باشد، لذا داده‌ها با هم برابرند، یعنی $۲ , x_۲ , \cdots , x_۸$

از طرفی چون همه داده‌ها با هم برابرند پس میانگین برابر یکی از آن‌هاست. یعنی:

$\bar{x} = ۲$

۱۱۳ - گزینه ۱ معلم ترجیح می‌دهد در کلاسی تدریس کند که ضریب تغییرات کمتری دارد. پس میانگین و انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$A : ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲ \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲}{۵} = \dfrac{۵۰}{۵} = ۱۰$

$\sigma^۲ = \dfrac{(۸ - ۱۰)^۲ + (۹ - ۱۰)^۲ + (۱۰ - ۱۰)^۲ + (۱۱ - ۱۰)^۲ + (۱۲ - ۱۰)^۲}{۵} = \dfrac{۴ + ۱ + ۰ + ۱ + ۴}{۵} = ۲ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۲}$

$\Rightarrow CV_A = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

$B : ۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰ \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{۰ + ۵ + ۱۰ + ۱۵ + ۲۰}{۵} = ۱۰$

$\sigma^۲ = \dfrac{(۰ - ۱۰)^۲ + (۵ - ۱۰)^۲ + (۱۰ - ۱۰)^۲ + (۱۵ - ۱۰)^۲ + (۲۰ - ۱۰)^۲}{۵} = \dfrac{۱۰۰ + ۲۵ + ۰ + ۲۵ + ۱۰۰}{۵} = \dfrac{۲۵۰}{۵} = ۵۰ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۵۰}$

$\Rightarrow CV_B = \dfrac{\sqrt{۵۰}}{۱۰}$

معلوم است که $CV_A < CV_B$.

۱۱۴ - گزینه ۳ مجموع فراوانی‌های نسبی N داده‌ی آماری برابر یک می‌باشد.

فراوانی نسبی دسته‌ی سوم : $۰٫۲ + ۰٫۴ + x + ۰٫۱۵ = ۱ \rightarrow x = ۰٫۲۵$

فراوانی مطلق دسته‌ی سوم : $F_i = \dfrac{f_i}{N} \rightarrow \dfrac{۲۵}{۱۰۰} = \dfrac{f_i}{۲۴} \rightarrow f_i = \dfrac{۲۴ \times ۲۵}{۱۰۰} = ۶$

۱۱۵ - گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$۵ , ۷ , ۸ , \underset{\downarrow Q_۱}{\boxed{۹}} , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , \underset{\downarrow \text{میانه} = Q_۲}{\boxed{۱۴}} , ۱۶ , ۱۷ , ۱۸ , \underset{\downarrow Q_۳}{\boxed{۱۹}} , ۲۰ , ۲۱ , ۲۳$

داده‌های مورد نظر: $۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۷ , ۱۸$

$\bar{x} = \dfrac{۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸}{۷} = \dfrac{۹۸}{۷} = ۱۴$

$\sigma^۲ = \dfrac{(۱۰ - ۱۴)^۲ + (۱۱ - ۱۴)^۲ + (۱۲ - ۱۴)^۲ + (۱۴ - ۱۴)^۲ + (۱۶ - ۱۴)^۲ + (۱۷ - ۱۴)^۲ + (۱۸ - ۱۴)^۲}{۷}$

$$= \frac{۱۶+۹+۴+۰+۴+۹+۱۶}{۷} = \frac{۵۸}{۷}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲
۲ - ۱
۳ - ۲
۴ - ۲
۵ - ۳
۶ - ۱
۷ - ۴
۸ - ۴
۹ - ۲
۱۰ - ۲
۱۱ - ۱
۱۲ - ۲
۱۳ - ۱
۱۴ - ۱
۱۵ - ۲
۱۶ - ۲
۱۷ - ۴
۱۸ - ۴
۱۹ - ۱
۲۰ - ۳
۲۱ - ۱
۲۲ - ۱
۲۳ - ۳
۲۴ - ۳
۲۵ - ۳
۲۶ - ۴
۲۷ - ۱
۲۸ - ۱
۲۹ - ۳
۳۰ - ۱
۳۱ - ۲
۳۲ - ۳
۳۳ - ۳
۳۴ - ۱
۳۵ - ۴
۳۶ - ۴
۳۷ - ۱
۳۸ - ۱
۳۹ - ۳
۴۰ - ۴
۴۱ - ۲
۴۲ - ۴
۴۳ - ۲
۴۴ - ۲
۴۵ - ۴
۴۶ - ۲
۴۷ - ۱
۴۸ - ۲
۴۹ - ۲
۵۰ - ۴
۵۱ - ۲
۵۲ - ۱
۵۳ - ۴
۵۴ - ۳
۵۵ - ۱
۵۶ - ۳
۵۷ - ۴
۵۸ - ۲
۵۹ - ۱
۶۰ - ۲
۶۱ - ۱
۶۲ - ۱
۶۳ - ۳
۶۴ - ۴
۶۵ - ۳
۶۶ - ۳
۶۷ - ۴
۶۸ - ۳
۶۹ - ۲
۷۰ - ۳
۷۱ - ۳
۷۲ - ۴
۷۳ - ۳
۷۴ - ۲
۷۵ - ۲
۷۶ - ۳
۷۷ - ۴
۷۸ - ۳
۷۹ - ۴
۸۰ - ۲
۸۱ - ۱
۸۲ - ۲
۸۳ - ۴
۸۴ - ۴
۸۵ - ۴
۸۶ - ۴
۸۷ - ۲
۸۸ - ۱
۸۹ - ۲
۹۰ - ۱
۹۱ - ۴
۹۲ - ۱
۹۳ - ۲
۹۴ - ۱
۹۵ - ۳
۹۶ - ۴
۹۷ - ۴
۹۸ - ۴
۹۹ - ۲
۱۰۰ - ۲
۱۰۱ - ۴
۱۰۲ - ۴
۱۰۳ - ۱
۱۰۴ - ۴
۱۰۵ - ۳
۱۰۶ - ۱
۱۰۷ - ۴
۱۰۸ - ۱
۱۰۹ - ۳
۱۱۰ - ۳
۱۱۱ - ۱
۱۱۲ - ۱
۱۱۳ - ۱
۱۱۴ - ۳
۱۱۵ - ۲