نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: حسابان ۱ تکالیف عید

دبیرستان سپهر دانش

فصل اول : جبر و معادله

درس اول : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

۱ - اعداد $a, ۸, ۲a+۱, ۰۰۱$ جملات ابتدایی یک دنباله‌ی عددی‌اند جمله‌ی دهم کدام است؟

① $۲a$ ② ۳۱ ③ ۳۲ ④ ۳۵

۲ - در ۱۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف زوج سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. نسبت جملهٔ اول به قدرنسبت این دنباله کدام است؟

① $-\frac{۹}{۲}$ ② $-\frac{۷}{۲}$ ③ -۴ ④ -۵

۳ - مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۴ و ۶ کدام است؟

① ۴۸۶ ② ۴۴۰ ③ ۳۷۸ ④ ۴۳۲

۴ - در یک دنبالهٔ حسابی که ۹ جمله دارد، مجموع سه جملهٔ وسط ۲۱ است. مجموع تمام جملات این دنباله کدام است؟

① ۱۲۶ ② ۶۳ ③ ۱۸۹ ④ ۹۸

درس دوم : معادلات درجه دوم

۵ - طول یک نوع کاشی دو سانتی‌متر بلندتر از سه برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۲۴ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۴ ④ ۲۷

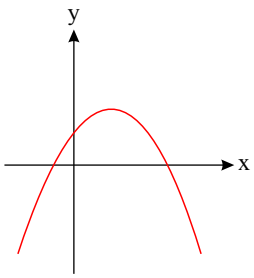
۶ - اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ بین ضرایب، رابطهٔ $۴a+c=۲b$ برقرار باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها همواره کدام است؟

① $\frac{c}{۲a}$ ② ۲ ③ $۲-\frac{b}{a}$ ④ $۲+\frac{b}{a}$

۷ - اگر معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد، آنگاه معادلهٔ $x^۲+\frac{a-۲}{۲}x+\frac{b-a}{۴}=۰$ کدام وضع را دارد؟

① دو ریشه مثبت دارد. ② دو ریشه منفی دارد. ③ دو ریشه مختلف‌العلامه دارد. ④ یک ریشه مضاعف دارد.

۸ - در شکل زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^۲+bx+c$ رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



① $c<۰$ و $b<۰$ و $a<۰$ و معادلهٔ $P(x)=۰$ دو ریشه دارد.

② $c>۰$ و $b>۰$ و $a<۰$ و معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشه ندارد.

③ $c>۰$ و $b<۰$ و $a>۰$ و معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشه ندارد.

④ $c>۰$ و $b>۰$ و $a<۰$ و معادلهٔ $P(x)=۰$ دو ریشه دارد.

۹ - صفرهای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲(x^۳+\frac{۳}{۸})^۲-۳(x^۳+\frac{۳}{۸})+۱$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۸}$ و $\frac{۵}{۸}$ ② $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt[۳]{۵}}{۲}$ ③ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$ و $\sqrt[۳]{۵}$ ④ $\frac{\sqrt[۳]{۵}}{۲}$ و $\frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۲}$

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

۱۰ - ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $\frac{۶x}{x^۲+۳x+۲} = \frac{x-۲}{x^۲+x-۲} + \frac{۲x-۱}{x^۲-۱}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $-\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $-\frac{۱}{۳}$

۱۱ - جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $\frac{x^۲+x}{x^۲+x+۴} + \frac{۲}{x^۲+x+۱} = ۱$ کدام است؟

① ۱ ② $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۳}$

۱۲ - به ازای چند مقدار m، مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{۳-x}{۲x-x^۲} = \frac{m}{۲x}$ برابر تهی می‌شود؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۱۳ - مجموع جواب‌های معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x+۱} = -۱$ کدام است؟

① -۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۴ - حدود m کدام باشد تا معادلهٔ $\sqrt{x^۲+۶x} = m(x+۳)$ فقط یک جواب منفی داشته باشد؟

① $-۱ < m < ۰$ ② $-۱ < m < ۱$ ③ $-\frac{۳}{۲} < m < \frac{۱}{۲}$ ④ $۰ \le m < ۱$

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

۱۵ - اگر $۱ < x < ۲$ باشد حاصل $\sqrt{۱-۴x+۴x^۲} + |۲-x|$ کدام است؟

① $۳x-۳$ ② $x+۱$ ③ $۳-۳x$ ④ $x-۱$

۱۶ - مساحت سطح محدود به نمودار توابع $y = x+۲$ و $y = |x| + |x-۲|$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۱۷ - کدام عبارت همواره صحیح نیست؟

① $|a-b| \le |a| + |b|$ ② $|a-b| \le |a| - |b|$ ③ $|a-b| + |a-۲b| \ge |b|$ ④ $|a-b| \ge ||a| - |b||$

۱۸ - چند عدد صحیح در معادلهٔ $|x+۱۱| = |۲x+۷| + |x-۴|$ صدق می‌کنند؟

① ۸ ② ۹ ③ ۷ ④ ۱۰

۱۹ - مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x| + |x+۱| \le ۱$ کدام است؟

① $\left[-۱ \ , \ \frac{-۱}{۲}\right]$ ② $[-۱ \ , \ ۰]$ ③ $\left[\frac{-۱}{۲} \ , \ ۰\right]$ ④ $[-۱ \ , \ ۱]$

۲۰ - مجموع ریشه‌های معادلهٔ $|x-۴| = |۳x-۲|$ کدام است؟

① ۱ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۲

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

۲۱ - خط $mx - ۴y + ۱۲ = ۰$ از نقطه $A(-۲, m)$ می‌گذرد. این خط محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

① ۳ ② -۶ ③ ۴ ④ -۸

۲۲ - در مثلث ABC با مختصات رئوس $A\begin{vmatrix}۲\\۲\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}۲\\۵\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۶\\۲\end{vmatrix}$، طول پاره‌خطی که از رأس A بر ضلع مقابل آن رسم می‌شود تا مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کند، کدام است؟

① ۲ ② ۲٫۵ ③ ۳ ④ ۳٫۵

۲۳ - دو نقطهٔ $(a-۳,۲)$ و $(a+۱,-۲a)$ دو سر قطر یک دایره می‌باشند و مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. شعاع دایره کدام است؟

① ۴ ② $۲\sqrt{۲}$ ③ $۴\sqrt{۲}$ ④ ۲

۲۴ - اگر نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۴,۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس سوم با عرض منفی کدام است؟

① $(۲,۲\sqrt{۳})$ ② $(۲,-\sqrt{۳})$ ③ $(۲,-۲\sqrt{۳})$ ④ $(۲,-۲)$

۲۵ - دایره‌ای به مساحت ۹π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $۳x-۴y=۱$ و $۸y+nx=m$ مماس است. مقدار $m+۳n$ کدام می‌تواند باشد؟

① -۲۰ ② ۴۰ ③ -۶۰ ④ ۸۰

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

۲۶ - اگر دو تابع $f=\{(a,۱)(۳,۲)(۰,۱)\}$ و $g=\{(a,b-۲)(۰,۱)(c,a)\}$ باهم مساوی باشند آن‌گاه $۲c-b+a$ کدام است؟

① ۲ ② ۵ ③ ۳ ④ ۴

۲۷ - دامنهٔ تابع $\frac{y+۲}{۲x-۱}=\frac{y-۱}{x+۲}$ به‌صورت $D_f:\mathbb{R}-A$ است، تعداد توابع از A به A کدام است؟

① $۳^۳$ ② $۱^۱$ ③ $۲^۲$ ④ بی شمار

۲۸ - اگر توابع $f=\{(۲,n-۱),(۰,۳),(۵,۲m)\}$ و $g=\{(۰,۳),(۵,-۸),(۲,۲n)\}$ برابر باشند، حاصل $m-۳n$ کدام است؟

① -۵ ② -۷ ③ -۱ ④ ۱

۲۹ - در کدام گزینه توابع f و g باهم برابر هستند؟

① $f(x)=(x-۳)\sqrt{x+۲}$، $g(x)=\sqrt{(x-۳)^۲(x+۲)}$

② $f(x)=\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}$، $g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}}$

③ $f(x)=\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}$، $g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}$

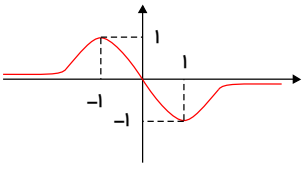
④ $f(x)=\sqrt{۱+x}$، $g(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x}}$

درس دوم : انواع توابع

۳۰ - اگر دو تابع $f(x)=\frac{ax^۳+b}{۲x^۳-c}$ و $\begin{cases}g(x)=۲\\D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}\end{cases}$ با هم مساوی باشند، $a+b+c$ کدام است؟

① ۲ ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۰

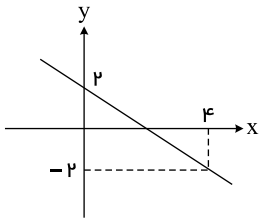
۳۱ - اگر تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{۱-|f(x)|}$ کدام است؟

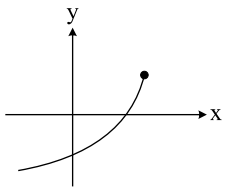


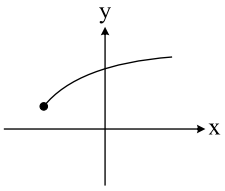
① $x\in[-۱,۱]$ ② $x\in(-۱,۱)$

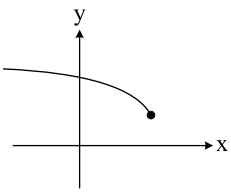
③ $x\in\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ④ $x\in\mathbb{R}$

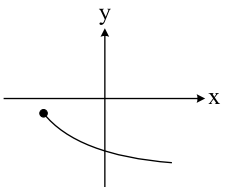
۳۲ - نمودار تابع خطی f به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = ۱ + \sqrt{f(x)}$ کدام است؟



① 

② 

③ 

④ 

۳۳ - در کدام رابطهٔ زیر y تابعی برحسب x است؟

① $|y| - x = ۲$ ② $y^۳ = y + x$ ③ $x^۲ + |y - ۲| = ۰$ ④ $|x - ۱| + |y^۲ - ۴| = ۰$

۳۴ - اگر مساحت بین نمودار $y = [ax]$ با محور x ها در بازهٔ $(۰, ۱]$ برابر ۱٫۵ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

درس سوم : وارون تابع

۳۵ - اگر تابع $f = \{(-۲, ۲)(a, ۳)(-۱, ۳)(۲a, b)\}$ یک‌به‌یک باشد. (a, b) کدام است؟

① $(۲, -۱)$ ② $(-۱, ۲)$ ③ $(۱, -۲)$ ④ $(۱, ۲)$

۳۶ - کدام تابع یک‌به‌یک است؟

① $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۰ \\ ۱ - x & x < ۰ \end{cases}$ ② $f(x) = \begin{cases} x - ۲ & x > ۰ \\ x + ۲ & x \leq ۰ \end{cases}$ ③ $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ ④ $f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$

۳۷ - اگر $f = \{(۴, ۲), (a, ۵), (۴, a^۲ - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، زوج‌مرتب (a, b) کدام است؟

① $(۲, -۱)$ ② $(۲, ۴)$ ③ $(-۱, ۴)$ ④ $(۲, ۲)$

۳۸ - وارون چند یک از توابع زیر با خودش برابر است؟

$y = -x + b$ ، $y = x$ ، $\{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$ ، $y = \dfrac{x + ۲}{x - ۱}$

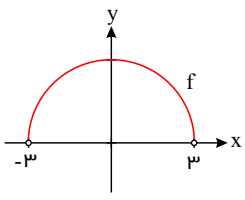
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

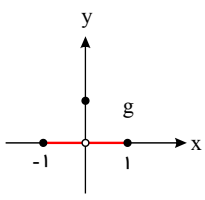
درس چهارم : اعمال روی توابع

۳۹ - مجموع مؤلفه‌های دوم $\dfrac{-۲f}{g^۲}$ با فرض $f = \{(۱, ۲)(-۱, ۰)(-۲, -۴)(۲, ۲)\}$ و $g = \{(۱, -۲)(-۲, ۲)(۰, -۱)(۲, ۰)\}$ کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ -۲ ④ ۳

۴۰ - اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟





① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۱ - اگر $f(x) = \dfrac{۳x + ۱}{x + a}$ و $fof(x) = x$ باشد آن‌گاه a کدام است؟

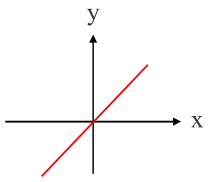
① ۱ ② -۱ ③ -۳ ④ ۳

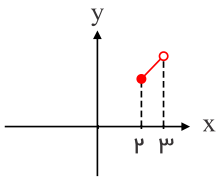
حسابان ۱ تکالیف عید

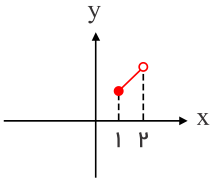
۴۲ - اگر $f(x) = ۱ + x^۲$ و $(gof)(x) = ۱ + \frac{۱}{x^۲}$ باشد، در این صورت $g(۳)$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$

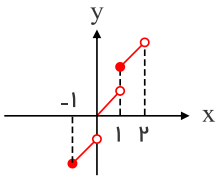
① $\frac{۲}{۳}$ ② ۱ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴۳ - اگر $f^{-۱}(x)$ وارون تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنهٔ $D_f = [۱, ۲)$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y = (fof^{-۱})(x)$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

فصل سوم : تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

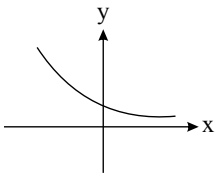
۴۴ - نمودارهای دو تابع $f(x) = ۴^x$ و $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$، کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۵}$

۴۵ - ۱۰۰ باکتری از یک نوع خاص موجود است و هر ۱۵ دقیقه تعداد آن‌ها ۲ برابر می‌شود. تعداد این باکتری‌ها بعد از t ساعت از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

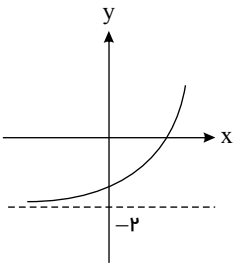
① $f(t) = ۲ \times ۱۰۰^t$ ② $f(t) = ۲ \times ۱۰۰^{۳t}$ ③ $f(t) = ۱۰۰ \times ۲^t$ ④ $f(t) = ۱۰۰ \times ۲^{۴t}$

۴۶ - به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (\frac{۳a - ۱}{a})^x$ به شکل مقابل است؟



① $(-\infty, ۰)$ ② $(\frac{۱}{۳}, +\infty)$ ③ $(۰, \frac{۱}{۲})$ ④ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$

۴۷ - اگر نمودار تابع $f(x) = (۲m^۲ - m)^x - n$ به‌صورت زیر باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟



① $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$ ② $(۰, \frac{۱}{۲})$

③ $(-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup (۱, +\infty)$ ④ $\mathbb{R} - (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

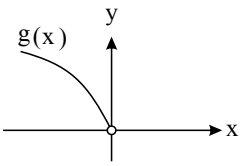
۴۸ - دامنه‌ی تعریف تابع $y = \log_x^{(x^۲ - ۴)}$ کدام است؟

① $x > ۲$ ② $|x| > ۲$ ③ $|x| < ۲$ ④ $x > ۰$

۴۹ - معادله‌ی $\log_{۰/۲}(x + ۱) = x + ۳$ چند ریشه دارد؟

① ۲ ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. ② یک ریشه‌ی منفی دارد. ③ یک ریشه‌ی مثبت دارد. ④ ریشه ندارد.

۵۰ - اگر $f(x)=\log(x-1)$ و نمودار $g(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ gof به صورت (a,b) خواهد بود. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

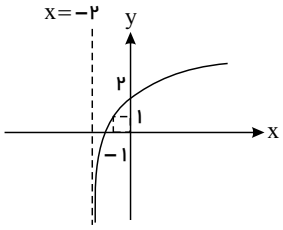


(۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

۵۱ - کدام گزینه نادرست است؟

(۱) لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از ۱ همواره مثبت است.
(۲) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.
(۳) تابع $y=1+\log_3^x$ محور xها را قطع می‌کند.
(۴) تابع لگاریتم تابعی یک‌به‌یک است.

۵۲ - اگر نمودار تابع $y=\log_2^{(x+a)}-b$ را دو واحد به سمت بالا و سپس ۳ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار زیر حاصل می‌شود. حاصل $a-b$ برابر کدام گزینهٔ زیر است؟



(۱) ۲ (۲) -2
(۳) صفر (۴) ۱

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادله های لگاریتمی

۵۳ - حاصل $\log_{(1+\sqrt{2})}^{(3+2\sqrt{2})^3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۴ - عبارت $\frac{\log_3^{16}}{\log_5^8+\log_5^4}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{4}{5}\log_3^5$ (۲) $\frac{4}{5}\log_5^3$ (۳) $\frac{2}{5}\log_5^3$ (۴) $\frac{2}{5}\log_3^5$

۵۵ - اگر $A=(\log 2)^3+(\log 8)(\log 5)+(\log 5)^3$ باشد، حاصل عبارت $\log_{(3A+5)}^{(3A+1)}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲٫۵ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۶ - چند عدد صحیح کوچک‌تر از ۱۰ در نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{3}}^{x-2}+\log_{\frac{1}{3}}^{x-4}<-1$ صدق می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۲

۵۷ - اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(\log_9^{x^2})^2-21\log_{27}^x=-12$ باشند. حاصل $(\log_3^\alpha)^2+(\log_3^\beta)^2$ کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۵

فصل چهارم : مثلثات

درس اول : رادیان

۵۸ - در دایره‌ای به شعاع $4cm$ طول کمان مقابل به زاویه 20° چقدر است؟

(۱) $\frac{4\pi}{9}cm$ (۲) $\frac{2\pi}{9}cm$ (۳) $40cm$ (۴) $80cm$

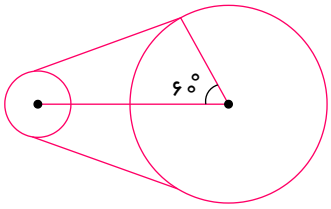
۵۹ - اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های $\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{۵\pi}{۶}$ و $-\frac{\pi}{۲}$ را در دایرهٔ مثلثاتی به هم وصل کنیم، یک مثلث ایجاد می‌شود. نوع مثلث کدام است؟

(۱) متساوی‌الساقین است ولی متساوی‌الاضلاع نیست.
(۲) متساوی‌الاضلاع است.
(۳) فقط قائم‌الزاویه است.
(۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۶۰ - چرخی که با سرعت ثابت حول مرکزش دوران می‌کند، در هر ساعت ۳۰۰۰ دور می‌چرخد. این چرخ در یک ثانیه بر حسب رادیان چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

(۱) $\frac{۴\pi}{۳}$
(۲) $\frac{۵\pi}{۲}$
(۳) $\frac{۵\pi}{۳}$
(۴) π

۶۱ - در شکل روبه‌رو دو چرخ با شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر به وسیلهٔ یک تسمه به هم مرتبط شده‌اند. اندازهٔ طول تسمه چقدر است؟



(۱) $۲\sqrt{۳}+۳\pi$
(۲) $۲\sqrt{۳}+\frac{۱۰\pi}{۳}$
(۳) $۴\sqrt{۳}+\frac{۸\pi}{۳}$
(۴) $۴\sqrt{۳}+\frac{۱۴\pi}{۳}$

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زاویه ها

۶۲ - حاصل عبارت $\sin^۲\frac{۷\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۲}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{۳}{۲}$
(۴) ۱

۶۳ - اگر $\cos(\frac{۵\pi}{۲}+\theta)=\frac{۳}{۵}$ باشد، حداکثر مقدار عبارت $A=۲\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)+\cos(۳\pi-\theta)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۰٫۶
(۲) ۰٫۸
(۳) ۱٫۲
(۴) ۲٫۴

۶۴ - از به هم وصل کردن انتهای کمان‌های $\frac{\pi}{۳}$ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ روی دایرهٔ مثلثاتی مثلثی تشکیل می‌شود. مساحت این مثلث کدام است؟

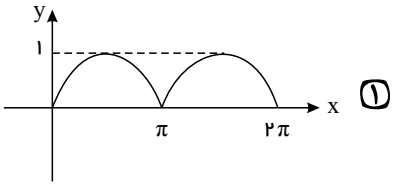
(۱) ۱
(۲) $\sqrt{۳}$
(۳) $\frac{۱}{۲}$
(۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

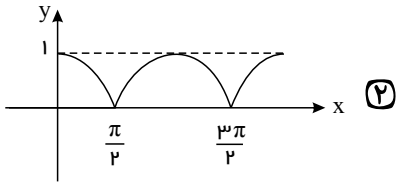
۶۵ - اگر $\tan ۲۲^\circ = a$، آنگاه حاصل $\frac{\sin(۲۹۲^\circ)-۳\cos(۱۵۸^\circ)}{۲\sin(۳۳۸^\circ)+\sin(۱۱۲^\circ)}$ کدام است؟

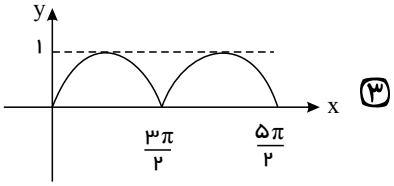
(۱) $\frac{۴}{۱-۲a}$
(۲) $\frac{۲}{۱-۲a}$
(۳) $\frac{۴}{۲a+۱}$
(۴) $\frac{۲}{۱+۲a}$

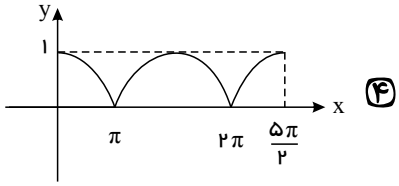
درس سوم : توابع مثلثاتی

۶۶ - نمودار $y = |\sin x|$ کدام است؟

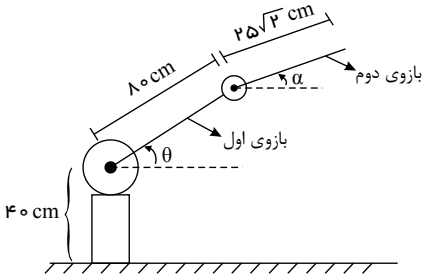
۱) 

۲) 

۳) 

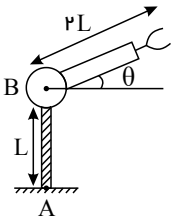
۴) 

۶۷ - شکل زیر یک ربات است که از دو بازوی متصل به‌هم برای برداشتن اجسام استفاده می‌کند. این ربات برای برداشتن یک شیء،بازوی دوم خود را در حالت زاویهٔ $\alpha = -۴۵^\circ$ نسبت به افق قرار داده است. اگر بازوی اول در وضعیت افقی قرار گیرد، ارتفاع جسم از سطح زمین برحسب سانتی‌متر کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۳۵
۴) ۱۰

۶۸ - در شکل زیر، بازوی حرکت روبات به‌گونه‌ای قرار گرفته است که فاصلهٔ نوک گیره تا سطح زمین، نصف حداکثر مقدار ممکن است. فاصلهٔ تصویر نوک گیره بر روی زمین تا نقطهٔ A، چند برابر L است؟ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۶۹ - تابع $y = \sin x$ با کدام دامنه، تابعی یک به یک است؟

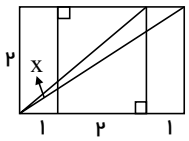
۱) $(\pi, \frac{۵\pi}{۳})$
۲) $(-\frac{۴\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۲})$
۳) $(۳\pi, ۴\pi)$
۴) $(\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳})$

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۷۰ - بیش‌ترین مقدار تابع $y = (\sin x - \cos ۲x)^۲ + (\cos x - \sin ۲x)^۲$ چیست؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۱ - در مستطیل زیر، مقدار $\cos x$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{\sqrt{۶۵}}$
۲) $\frac{۶}{\sqrt{۶۵}}$
۳) $\frac{۹}{\sqrt{۲۶۰}}$
۴) $\frac{۱۵}{\sqrt{۲۶۰}}$

۷۲ - به ازای چه مقادیری از a دامنه‌ی $f(x) = \frac{۱}{a\sin^۲ x - \cos ۲x + ۱}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) $a \neq -۲$
۲) $a \neq ۲$
۳) $a \in \mathbb{R}$
۴) هیچ مقدار a

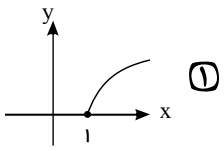
۷۳- اگر $\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ کدام است؟

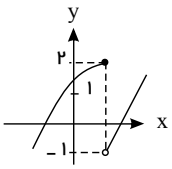
① $\frac{۱}{۴}$ ② $-\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۶}$ ④ $-\frac{۱}{۶}$

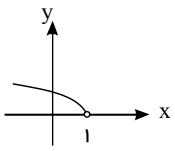
فصل پنجم : حد و پیوستگی

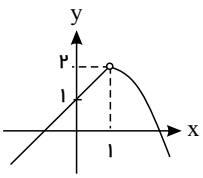
درس دوم : حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)

۷۴- در کدام‌یک از نمودارهای زیر تابع f در $x=۱$ حد دارد؟

① 

② 

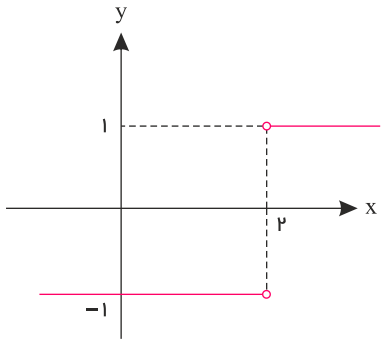
③ 

④ 

۷۵- اگر دو تابع f و g هر دو در $x_۰=۲$ دارای حد باشند و حد توابع $f+g$ و $f^۲-g^۲$ در $x=۲$ به‌ترتیب برابر با ۲ و ۶ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{f(۲x-۲)}$ کدام است؟

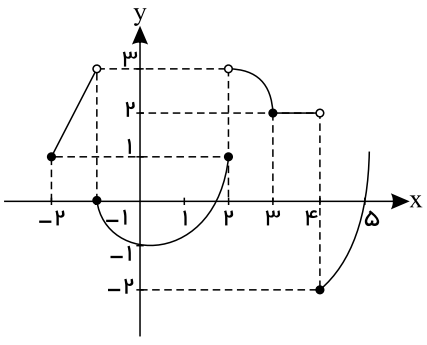
① $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ② $\sqrt{۲٫۵}$ ③ $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ④ $\sqrt{۵}$

۷۶- اگر تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل باشد، کدام تابع در $x=۲$ حد ندارد؟



① $f^۲(x)$
② $|f(x)|$
③ $f^۳(x)$
④ $\frac{|x-۲|}{x-۲}\cdot f(x)$

۷۷- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است. حاصل کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟



① $\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)+\lim\limits_{x\to ۰}f(x)$
② $\lim\limits_{x\to ۳٫۵}f(x)-\lim\limits_{x\to -۲^+}f(x)$
③ $\lim\limits_{x\to ۴^+}f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)$
④ $\lim\limits_{x\to -۱^-}f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)$

درس سوم : قضایای حد

۷۸- اگر $f(x)=\begin{cases}mx-۲ & x>۲\\ [x]+۳ & x<۲\end{cases}$ و تابع در نقطه $x=۲$ حد داشته باشد، m کدام است؟

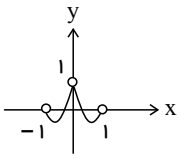
① -۱ ② ۱ ③ -۳ ④ ۳

حسابان ۱ تکالیف عید

۷۹ - اگر $f(x)=\begin{cases} m[-x]+۳x & x<-۲ \\ ۲[x^۲]+m & x>-۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)$ کدام است؟

① ۱۲ ② ۱۳ ③ ۱۵ ④ ۱۴

۸۰ - با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱^-}[f(x)]+\lim\limits_{x\to(-۱)^+}[f^۲(x)]-[\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



① ۱ ② −۱ ③ صفر ④ وجود ندارد

۸۱ - تابع $[-\frac{x}{۲}]$ در $f(x)=(a+۱)[۳x]+(۲a-۴)$ حد دارد. مقدار $a^۲-۵a$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① −۴ ② ۶ ③ −۶ ④ صفر

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۸۲ - مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱۳}-۲\sqrt{x+۱}}{x^۲-۹}$ برابر کدام گزینه است؟

① $\frac{-۱}{۱۶}$ ② $\frac{۲}{۷}$ ③ $\frac{-۱}{۳}$ ④ $\frac{-۲}{۷}$

۸۳ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x-\sqrt{x}}{x-۱} & ,x>۱ \\ ax-a+b & ,x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار b کدام است؟

① ۱ ② −۱ ③ $-\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۸۴ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{۵x^۳}$ کدام است؟

① صفر ② $\frac{۱}{۵}$ ③ $\frac{۳}{۵}$ ④ $\frac{۶}{۵}$

۸۵ - حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۲}}\frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^۲ x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $-\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ −۱ ④ حد وجود ندارد.

درس پنجم : پیوستگی

۸۶ - وضعیت پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲+۳x-۴}{\sqrt{x^۲-۲x+۱}} & ;\ x\neq ۱ \\ -۵ & ;\ x=۱ \end{cases}$ در $x_۰=۱$ کدام است؟

① فقط از راست پیوسته ② فقط از چپ پیوسته ③ پیوسته ④ نه از راست پیوسته و نه از چپ پیوسته

۸۷ - تابع $f(x)=\left[x^۲\right]$ در نقطهٔ $x=-۳$:

① پیوسته است. ② فقط پیوستگی چپ دارد.

③ فقط پیوستگی راست دارد. ④ نه پیوستگی چپ و نه پیوستگی راست دارد.

۸۸ - اگر توابع fg و $\frac{f}{g}$ در $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه کدام تابع الزاماً در $x=a$ پیوسته است؟

① f ② g ③ $f^۲$ ④ $g^۲$

۸۹ - به‌ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{a|x|}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است؟

① فقط $a=۱$ ② فقط $a=-۱$ ③ $a=\pm ۱$ ④ هیچ‌مقدار a

۹۰ - تابع $f(x)=[\sqrt[۳]{x}]$ در بازهٔ $(k, ۱۲)$ در سه نقطهٔ ناپیوسته است. کمترین مقدار k کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{۶۴}{۹}$ ② $\frac{۶۴}{۳}$ ③ $\frac{۴۹}{۹}$ ④ $\frac{۴۹}{۳}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی عددی باشند، آنگاه $۲b = a + c$ می‌باشد.

$$a + (۲a + ۱) = ۲(۸) \Rightarrow d = ۳$$
$$\Rightarrow ۵, ۸, ۱۱, \cdots$$
$$a_{۱۰} = a_۱ + ۹d = ۵ + ۳(۹) = ۳۲$$

۲ - گزینه ۲ اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد، دنبالهٔ جملات ردیف فرد دارای جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $۲d$ و دنبالهٔ جملات ردیف زوج دارای جملهٔ اول $a_۲$ و قدرنسبت $۲d$ هستند، پس داریم:

$$\text{مجموع جملات ردیف فرد} : a_۱ + a_۳ + a_۵ + a_۷ + a_۹ = \frac{۵}{۲}[۲a_۱ + ۴(۲d)]$$

$$\text{مجموع جملات ردیف زوج} : a_۲ + a_۴ + a_۶ + a_۸ + a_{۱۰} = \frac{۵}{۲}[۲a_۲ + ۴(۲d)]$$

در نتیجه طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{\frac{۵}{۲}[۲a_۲ + ۸d]}{\frac{۵}{۲}[۲a_۱ + ۸d]} = ۳ \Rightarrow \frac{a_۲ + ۴d}{a_۱ + ۴d} = ۳ \Rightarrow a_۲ + ۴d = ۳a_۱ + ۱۲d$$

$$\xrightarrow{a_۲ = a_۱ + d} ۲a_۱ = -۷d \Rightarrow \frac{a_۱}{d} = -\frac{۷}{۲}$$

۳ - گزینه ۴ دنبالهٔ اعداد طبیعی دو رقمی که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۶ باشند، به‌صورت زیر است:

$$۱۲, ۲۴, ۳۶, \cdots, ۹۶$$

تعداد جملات این دنباله برابر است با:

$$n = \frac{۹۶ - ۱۲}{۱۲} + ۱ = ۸ \xrightarrow{\text{مجموع ۸ جمله}} S = \frac{۸}{۲}(۱۲ + ۹۶) = ۴(۱۰۸) = ۴۳۲$$

۴ - گزینه ۲ در بین سه جملهٔ وسط، جملهٔ پنجم واسطهٔ حسابی جملات چهارم و ششم است، پس:

$$a_۴ + a_۵ + a_۶ = ۲a_۵ + a_۵ = ۳a_۵ \Rightarrow a_۵ = \frac{\text{مجموع سه جملهٔ وسط}}{۳}$$
$$\text{جملهٔ پنجم} = \frac{۲۱}{۳} = ۷$$

از طرفی جملهٔ پنجم، میانگین جمله‌های اول و نهم نیز هست، پس:

$$\frac{a_۱ + a_۹}{۲} = ۷ \Rightarrow S_۹ = \frac{۹}{۲}(a_۱ + a_۹) = \frac{۹}{۲} \times ۱۴ = ۶۳$$

۵ - گزینه ۲ اگر عرض هر کاشی را x در نظر بگیریم، طول هر کاشی $۳x + ۲$ می‌باشد و داریم:

$$\text{مساحت یک کاشی} = x(۳x + ۲) \Rightarrow ۲۰۰۰x(۳x + ۲) = ۲۴m^۲ = ۲۴ \times (۱۰۰)^۲ cm^۲$$

$$\Rightarrow ۲۰۰۰x(۳x + ۲) = ۲۴۰۰۰۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x = ۱۲۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۱۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (۳x + ۲۰)(x - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۲۰}{۳} \text{ غ ق ق} \\ x = ۶\ cm \Rightarrow \text{طول کاشی} = ۳ \times ۶ + ۲ = ۲۰\ cm \end{cases}$$

۶ - گزینه ۳ اگر $x = -۲$ را در معادله قرار دهیم، به رابطهٔ $۴a - ۲b + c = ۰$ می‌رسیم که همان رابطهٔ صورت سوال است؛ بنابراین یکی از ریشه‌ها $x_۱ = -۲$ است. ریشهٔ دیگر را $x_۲$ می‌نامیم:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = x_۱ + x_۲ = -۲ + x_۲ \Rightarrow x_۲ = ۲ - \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = x_۱ x_۲ = -۲x_۲ \Rightarrow x_۲ = -\frac{c}{۲a} \end{cases}$$

۷ - گزینه ۱ چون معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است. پس برای این معادله داریم:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \\ S > ۰ \\ P > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ - ۴b > ۰ \\ a < ۰ \\ b > ۰ \end{cases}$$

با توجه به نامساوی‌های فوق برای معادلهٔ $x^۲ + \frac{a-۲}{۲}x + \frac{b-a}{۴} = ۰$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta = (\frac{a-۲}{۲})^۲ - ۴(\frac{b-a}{۴}) = \frac{a^۲ - ۴b + ۴}{۴} = \frac{a^۲ - ۴b}{۴} + ۱ > ۰ \\ S = -\frac{a-۲}{۲} \xrightarrow{a<۰} -\frac{a-۲}{۲} > ۰ \\ P = \frac{b-a}{۴} \xrightarrow[b>۰]{a<۰} \frac{b-a}{۴} > ۰ \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ $x^۲ + \frac{a-۲}{۲}x + \frac{b-a}{۴} = ۰$ نیز دو ریشهٔ مثبت دارد.

۸ - گزینه ۴ از آن‌جا که سهمی ماکزیمم دارد پس $a < ۰$ و با توجه به این‌که سهمی محور yها را در نقطه‌ای مثبت قطع کرده است، $c > ۰$؛ همچنین مختصات طول رأس سهمی مثبت است، پس: $x = -\frac{b}{۲a} > ۰$، در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} > ۰ \\ a < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow b > ۰$$

چون سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است پس معادلهٔ $P(x) = ۰$ دو ریشه دارد.

۹ - گزینه ۲ با تغییر متغیر $x^۳ + \frac{۳}{۸} = t$ ضابطهٔ تابع به صورت $f(t) = ۲t^۲ - ۳t + ۱$ در می‌آید. داریم:

$$۲t^۲ - ۳t + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲t-۱)(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۳ + \frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ t = ۱ \Rightarrow x^۳ + \frac{۳}{۸} = ۱ \Rightarrow x^۳ = \frac{۵}{۸} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[۳]{۵}}{۲} \end{cases}$$

۱۰ - گزینه ۱ با تجزیهٔ مخرج‌ها و بعد از آن با مخرج‌مشترک‌گیری، معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۱}{(x-۱)(x+۱)} + \frac{x-۲}{(x+۲)(x-۱)} = \frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)}$$
$$\Rightarrow \frac{(۲x-۱)(x+۲) + (x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۲)} = \frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)}$$

$$\xrightarrow{x \neq -۱, -۲, ۱} \frac{۲x^۲ + ۳x - ۲ + x^۲ - x - ۲}{x-۱} = ۶x \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۴ = ۶x(x-۱)$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۴ = ۶x^۲ - ۶x \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۴۸ = ۱۶$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۸ \pm ۴}{۶} \Rightarrow x_۱ = ۲ \ , \ x_۲ = \frac{۲}{۳}$$

پس ریشهٔ کوچک‌تر این معادله، $x = \frac{۲}{۳}$ است.

۱۱ - گزینه ۱ قرار می‌دهیم $T = x^۲ + x$. در این صورت داریم:

$$\frac{T}{T+۴} + \frac{۲}{T+۱} = ۱ \Rightarrow \frac{T^۲ + T + ۲T + ۸}{(T+۴)(T+۱)} = ۱ \Rightarrow T^۲ + ۳T + ۸ = T^۲ + ۵T + ۴ \Rightarrow ۲T = ۴ \Rightarrow T = ۲$$

پس:

$$x^۲ + x = ۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -۲ \text{ یا } x = ۱$$

جواب بزرگ‌تر $x = ۱$ است.

۱۲ - گزینه ۲

$$\frac{m}{۲x} = \frac{۳-x}{۲x-x^۲} \Rightarrow \frac{m}{۲x} = \frac{۳-x}{x(۲-x)} \xrightarrow[x \neq ۰ \ , \ x \neq ۲]{\times ۲x(۲-x)} m(۲-x) = (۳-x) \times ۲$$
$$۲m - mx = ۶ - ۲x \Rightarrow ۲m - ۶ = mx - ۲x \Rightarrow ۲m - ۶ = x(m-۲) \Rightarrow x = \frac{۲m-۶}{m-۲}$$

از آنجایی که $x = ۰$ و $x = ۲$ مخرج معادله را صفر می‌کنند، اگر جواب به‌دست آمده یکی از این اعداد باشد، معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow \frac{۲m-۶}{m-۲} = ۰ \Rightarrow ۲m - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲m = ۶ \Rightarrow m = ۳$$
$$x = ۲ \Rightarrow \frac{۲m-۶}{m-۲} = ۲ \Rightarrow ۲m - ۶ = ۲m - ۴ \Rightarrow -۶ = -۴ \text{ غیرممکن}$$

همچنین باید دقت کنیم اگر مخرج کسر $x=\frac{۲m-۶}{m-۲}$ یعنی $m-۲$ برابر صفر باشد معادله ریشه ندارد، در نتیجه $m=۲$.

بنابراین به ازای دو مقدار ۳ و ۲ $m=$ معادله جواب ندارد.

۱۳ - گزینه ۲

$$x-۲\sqrt{x+۱}=-۱\Rightarrow x+۱=۲\sqrt{x+۱}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲+۲x+۱=۴(x+۱)$$

$$x^۲+۲x+۱=۴x+۴\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۱$$

$$x=۳\xrightarrow{\text{امتحان در معادله}}۳-۲\sqrt{۴}=-۱\Rightarrow ۳-۴=-۱\Rightarrow x=۳ \text{ قابل قبول}$$

$$x=-۱\xrightarrow{\text{امتحان در معادله}}-۱-۲\sqrt{۰}=-۱\Rightarrow -۱=-۱\Rightarrow x=-۱ \text{ قابل قبول}$$

مجموع ریشه‌ها $=-۱+۳=۲$

۱۴ - گزینه ۱

$$\sqrt{x^۲+۶x}=m(x+۳)$$

ریشهٔ منفی یعنی $x<۰$، با در نظر گرفتن شرط رادیکال داریم:

$$x^۲+۶x\geq ۰\Rightarrow x(x+۶)\geq ۰\Rightarrow x\leq -۶ \quad \text{یا} \quad x\geq ۰\xrightarrow{x<۰} x\leq -۶$$

$$x\leq -۶\Rightarrow x+۳\leq -۳ \quad (۱)$$

در رابطهٔ $\sqrt{x^۲+۶x}=m(x+۳)$ با توجه به شرط (۱) باید $m<۰$ باشد تا حاصل رادیکال منفی نباشد. بنابراین فقط گزینهٔ «۱» قابل‌قبول است.

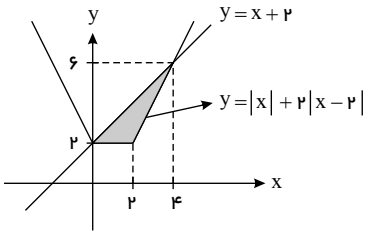
۱۵ - گزینه ۲

$$A=\sqrt{۱-۴x+۴x^۲}+|۲-x|=\sqrt{(۲x-۱)^۲}+|۲-x|=|۲x-۱|+|۲-x|$$

$$\begin{cases}۱<x<۲\Rightarrow & ۲<۲x<۴\Rightarrow & ۱<۲x-۱<۳\Rightarrow |۲x-۱|=۲x-۱\\ ۱<x<۲\Rightarrow & -۱>-x>-۲\Rightarrow ۱>۲-x>۰\Rightarrow |۲-x|=۲-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=۲x-۱+۲-x=x+۱$$

۱۶ - گزینه ۳



برای $x\geq ۲$، نقطهٔ برخورد دو تابع را می‌یابیم.

$$x+۲=x+x-۲\Rightarrow x=۴\ ,\ S_\Delta=\frac{۲\times(۶-۲)}{۲}=۴$$

۱۷ - گزینه ۲

با استفاده از نامساوی مثلثی داریم: $|x+y|\leq |x|+|y|$

$$x=a, y=-b\Rightarrow |a+(-b)|\leq |a|+|-b|\Rightarrow |a-b|\leq |a|+|b|$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

$$x=a-b, y=۲b-a\Rightarrow |a-b+۲b-a|\leq |a-b|+|۲b-a|\Rightarrow |b|\leq |a-b|+|۲b-a|\xrightarrow{|u|=|-u|}|a-b|+|a-۲b|\geq |b|$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$x=a-b, y=b\Rightarrow |a-b+b|\leq |a-b|+|b|\Rightarrow |a|\leq |a-b|+|b|\Rightarrow |a-b|\geq |a|-|b| \quad (۱)$$

$$x=a, y=b-a\Rightarrow |a+(b-a)|\leq |a|+|b-a|\Rightarrow |b|\leq |a|+|a-b|\Rightarrow |a-b|\geq |b|-|a|\Rightarrow |a|-|b|\geq -|a-b| \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow -|a-b|\leq |a|-|b|\leq |a-b|\Rightarrow ||a|-|b||\leq |a-b|$$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

با توجه به رابطهٔ (۱) گزینهٔ ۲ نادرست است.

۱۸ - گزینه ۱

نکته: $|A| = |-A|$

تساوی $|a+b| = |a| + |b|$ **زمانی برقرار است که داشته باشیم:** $a \cdot b \geq ۰$

$$|x-۴| + |۲x+۷| = |x+۱۱|$$

با توجه به رابطه $|x-۴| = |۴-x|$ **معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:**

$$|۴-x| + |۲x+۷| = |x+۱۱|$$

با فرض $a = ۴-x$ **و** $b = ۲x+۷$**، داریم:** $a+b = x+۱۱$**، پس معادله به‌صورت** $|a|+|b| = |a+b|$ **است و زمانی برقرار است که:** $a \cdot b \geq ۰$**باشد:**

$$\Rightarrow (۴-x)(۲x+۷) \geq ۰$$

x		$-\frac{۷}{۲}$		۴	
$(۴-x)(۲x+۷)$	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow -\frac{۷}{۲} \leq x \leq ۴$$

جواب‌های صحیح عبارتند از:

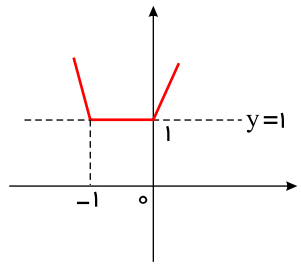
$$-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ \Rightarrow \text{تعداد} = ۸$$

۱۹ - گزینه ۲ نامعادله را به‌روش هندسی حل می‌کنیم. نمودارهای دوتابع $y_۱ = |x| + |x+۱|$ و $y_۲ = ۱$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم، بازه‌ای که در آن نمودار $y_۱$ پایین تر از نمودار $y_۲$ است یا هم‌دیگر را قطع کرده‌اند، مجموعهٔ جواب است.

با توجه به نمودار رسم شده بازهٔ $[-۱ \ , \ ۰]$ **مجموعهٔ جواب است.**

$y = |x| + |x+۱|$

$\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.$ گلدان



۲۰ - گزینه ۲ **نکته:** $|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$

$$|۳x-۲| = |x-۴| \Rightarrow ۳x-۲ = \pm(x-۴)$$

$$۳x-۲ = x-۴ \Rightarrow ۲x = -۲ \Rightarrow x = -۱$$

$$۳x-۲ = -(x-۴) \Rightarrow ۳x-۲ = -x+۴ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -۱ + \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

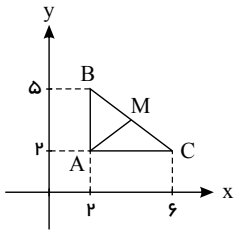
۲۱ - گزینه ۲ **مختصات نقطه** $A(-۲, m)$ **در معادلهٔ خط** $mx - ۴y + ۱۲ = ۰$ **صدق می‌کند.**

$$m(-۲) - ۴ \times m + ۱۲ = ۰ \rightarrow -۲m - ۴m + ۱۲ = ۰ \rightarrow ۶m = ۱۲ \rightarrow m = ۲ \rightarrow ۲x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

برای یافتن نقطهٔ برخورد خط با محور x**ها، در معادلهٔ خط** $y = ۰$ **را قرار می‌دهیم.**

$$y = ۰ \rightarrow ۲x + ۱۲ = ۰ \rightarrow x = -۶$$

۲۲ - گزینه ۲ **روش اول:**



با توجه به شکل، میانهٔ وارد بر ضلع BC **یعنی** AM **مثلث** ABC **را به دو مثلث با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی:** $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$

پس نقطهٔ M **وسط ضلع** BC **می‌باشد، بنابراین:**

$$x_M = \frac{x_B + c_C}{۲} = \frac{۲+۶}{۲} = ۴$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۲+۵}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (\frac{۷}{۲} - ۲)^۲} = \sqrt{۴ + \frac{۹}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

روش دوم: درمثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر برابر با نصف وتر است، پس داریم:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۶-۲)^۲ + (۲-۵)^۲} = \frac{۱}{۲}(۵) = ۲٫۵$$

۲۳ - گزینه ۲ نقاط $A(a-۳, ۲)\ ,\ B(a+۱, -۲a)$ را در نظر بگیرید.

چون مرکز دایره وسط نقاط دو سر قطر دایره است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مرکز } x = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{a+۱+a-۳}{۲} = \frac{۲a-۲}{۲} = a-۱ \\ \text{مرکز } y = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۲-۲a}{۲} = ۱-a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(a-۱, ۱-a)$$

چون مرکز دایره روی خط $y = x$ قرار دارد، داریم:

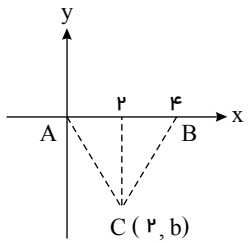
$$a-۱ = ۱-a \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow O(۰,۰)\ ,\ A(-۲, ۲)$$

در نتیجه شعاع دایره برابر است با:

$$\text{شعاع دایره} = OA = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

۲۴ - گزینه ۳ اول: رسم شکل

معلوم است که رأس C روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی روی خط $x = ۲$ است، پس طول آن ۲ است.



دوم: عرض آن را b در نظر می‌گیریم. پس مختصات آن $(۲, b)$ است.

می‌دانیم فاصلهٔ $AC = AB = ۴$. پس:

$$AC = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (b-۰)^۲} = ۴ \Rightarrow ۴ + b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b^۲ = ۱۲ \Rightarrow b = \pm ۲\sqrt{۳}$$

با توجه به صورت سؤال $b = -۲\sqrt{۳}$ صحیح است.

۲۵ - گزینه ۲ مساحت دایره برابر ۹π است، پس شعاع آن برابر $r = ۳$ است.

طرفین معادلهٔ $۳x - ۴y = ۱$ را در -۲ ضرب می‌کنیم:

$$۸y - ۶x = -۲$$

دو خط $۸y - ۶x = -۲$ و $۸y + nx = m$ موازی‌اند، پس $n = -۶$. فاصلهٔ دو خط موازی باید برابر قطر دایره یعنی ۶ باشد:

$$\frac{|m+۲|}{\sqrt{۶۴+۳۶}} = ۶ \Rightarrow |m+۲| = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۵۸ \\ m = -۶۲ \end{cases}$$

$$m + ۳n = ۵۸ + (-۱۸) = ۴۰$$

$$m + ۳n = -۶۲ + (-۱۸) = -۸۰$$

۲۶ - گزینه ۲

دو تابع به صورت زوج مرتب، در صورتی مساوی یکدیگرند که اولاً مولفه‌های اول برابر باشند و ثانیاً به ازای مولفه‌ی اول، باید مولفه‌ی دوم هم برابر باشد.

$$D_f = D_g \quad \Rightarrow \quad \{a, ۳, ۰\} = \{a, ۰, c\} \quad \Rightarrow \quad c = ۳$$

$$f(a) = g(a) \quad \Rightarrow \quad ۱ = b - ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۳$$

$$f(۳) = g(۳) \quad \Rightarrow \quad ۲ = a$$

پس $۲c - b + a = ۶ - ۳ + ۲ = ۵$ است.

۲۷ - گزینه ۱

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع ابتدا دامنهٔ دو کسر را می‌یابیم و سپس با طرفین و وسطین کردن، تابع y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم و دامنهٔ آن را هم می‌یابیم.

$$x + ۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۲ \quad (I)\ ,\ ۲x - ۱ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \frac{۱}{۲} \quad (II)$$

$$۲yx - y - ۲x + ۱ = yx + ۲x + ۲y + ۴ \Rightarrow y(x-۳) = ۴x + ۳ \Rightarrow y = \frac{۴x+۳}{x-۳} \Rightarrow x \neq ۳ \quad (III)$$

$$(I), (II), (III) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۳, -۲, \frac{۱}{۲}\} \Rightarrow A \text{ تعداد اعضا } n = ۳ \Rightarrow A \text{ به } \text{تعداد توابع از } = n^n = ۳^۳$$

۲۸ - گزینه ۳

$$f(۰) = g(۰) \Rightarrow ۳ = ۳ ✓$$

$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۲n=n-۱\rightarrow \boxed{n=-۱}$

$f(۵)=g(۵)\Rightarrow ۲m=-۸\rightarrow \boxed{m=-۴}$

$m-۳n=-۴-۳(-۱)=-۴+۳=-۱$

۲۹ - گزینه ۲ در گزینهٔ «۲» داریم:

$$g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}}\times\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}=\frac{۲x(\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x})}{x+۱-(۱-x)}=\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}$$

پس ضابطه‌های دو تابع f و g در گزینهٔ «۲» یکسان است.

$$\left.\begin{array}{l} D_g:\begin{cases} x+۱\geq ۰ \\ ۱-x\geq ۰ \end{cases}\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \\ \quad\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}\neq ۰ \\ D_f:\begin{cases} x+۱\geq ۰ \\ ۱-x\geq ۰ \end{cases}\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \end{array}\right\}\Rightarrow D_f=D_g$$

دامنه‌های دو تابع f و g در گزینهٔ «۲» نیز با هم برابرند پس این دو تابع باهم مساوی‌اند. در سایر گزینه‌ها، دامنهٔ دو تابع یا ضابطهٔ آن‌ها برابر نیستند، پس دو تابع برابر نیستند.

۳۰ - گزینه ۲ باید دامنهٔ دو تابع یکسان باشد یعنی $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}$ پس باید مخرج تابع f به‌ازای $x=-۱$ صفر شود.

$$۲x^۳-c=۰\xrightarrow{x=-۱}-۲-c=۰\Rightarrow c=-۲$$

باید ضابطهٔ دو تابع به‌ازای هر x از دامنهٔ تابع یکسان باشد.

$$f(x)=g(x)=۲\Rightarrow\frac{ax^۳+b}{۲x^۳+۲}=۲\Rightarrow ax^۳+b=۴x^۳+۴\Rightarrow a=۴\ ,\ \ b=۴$$

پس: $a+b+c=۴+۴-۲=۶$

۳۱ - گزینه ۴

زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$۱-|f(x)|\geq ۰\quad\Rightarrow\quad |f(x)|\leq ۱\quad\Rightarrow\quad -۱\leq f(x)\leq ۱$$

با توجه به شکل برد تابع f برای همه اعداد حقیقی برابر است با $-۱\leq f(x)\leq ۱$ پس دامنه تابع $y=\sqrt{۱-|f(x)|}$ برابر همه‌ی اعداد حقیقی است.

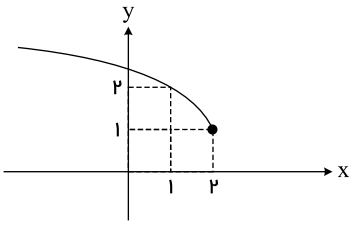
۳۲ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع خطی f را می‌یابیم. برای این کار معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه $A(۰,۲)$ و $B(۴,-۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۲}{۴-۰}=-۱, A(۰,۲)\Rightarrow y-۲=-۱\times(x-۰)\Rightarrow y=-x+۲\Rightarrow f(x)=-x+۲$$

حال نمودار تابع g را رسم می‌کنیم.

$$g(x)=۱+\sqrt{f(x)}=۱+\sqrt{-x+۲}\Rightarrow -x+۲\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲$$

نقاط کمکی : $C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.\quad D\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$



۳۳ - گزینه ۳ نکته: مجموع دو عبارت همواره نامنفی زمانی صفر است که هر دو عبارت با هم برابر صفر باشند.

نکته: اگر در رابطه‌ای بین x و y برای یک x مشخص، بیش از یک y وجود داشته باشد، آن رابطه تابع نیست.

گزینهٔ «۱»:

$$|y|-x=۲\xrightarrow{x=۰}|y|=۲\Rightarrow y=\pm ۲$$

تابع نیست.

گزینهٔ «۲»:

$$y^۳=y+x\xrightarrow{x=۰}y^۳=y\Rightarrow y^۳-y=۰\Rightarrow y(y^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} y=۰ \\ y^۲-۱=۰\Rightarrow y=\pm ۱ \end{cases}$$

تابع نیست.

گزینهٔ «۳»:

$\underbrace{x^{۲}}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{|y-۲|}_{\text{نامنفی}} = ۰ \Rightarrow x=۰, y-۲=۰ \Rightarrow x=۰, y=۲ \Rightarrow \{(۰,۲)\}$

تنها زوج مرتب $(۰,۲)$ در این رابطه صدق می‌کند، پس تابع است.

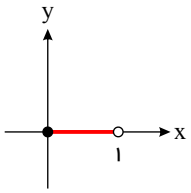
گزینهٔ «۴»:

$\underbrace{|x-۱|}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{|y^{۲}-۴|}_{\text{نامنفی}} = ۰ \Rightarrow x-۱=۰, y^{۲}-۴=۰ \Rightarrow x=۱, y=\pm ۲$

$\{(۱,۲),(۱,-۲)\} \Rightarrow$ تابع نیست.

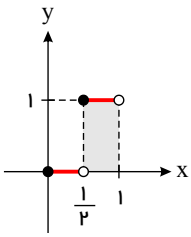
۳۴ - گزینه ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$a=۱ : y=[x]$



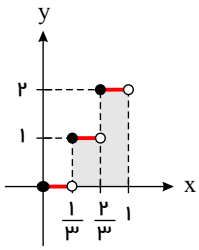
$\Rightarrow$ مساحت $: S=۰$

$a=۲ : y=[۲x]$



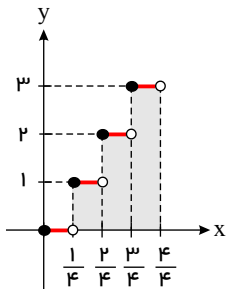
$\Rightarrow$ مساحت $: S=\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}$

$a=۳ : y=[۳x]$



$\Rightarrow$ مساحت $: S=\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times ۲=۱$

$a=۴ : y=[۴x]$



$\Rightarrow$ مساحت $: S=\frac{۱}{۴}\times ۱+\frac{۱}{۴}\times ۲+\frac{۱}{۴}\times ۳=\frac{۳}{۲}=۱/۵$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

۳۵ - گزینه ۲

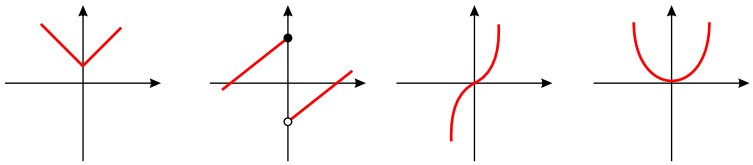
توجه: شرط اینکه یک تابع به‌صورت زوج مرتب معرف یک تابع یک به یک باشد این است که هیچ دو زوج مرتبی مولفه‌ی دوم یکسان نداشته و اگر یکسان باشد باید مولفه‌ی اول آن هم یکسان باشد.

$(a,۳),(-۱,۳) \Rightarrow f(a)=f(-۱) \Rightarrow a=-۱$

چون f تابع است $\Rightarrow f=\{(-۲,۲)(-۱,۳)(-۲,b)\} \Rightarrow (-۲,۲),(-۲,b) \Rightarrow b=۲$

$(a,b)=(-۱,۲)$

۳۶ - گزینه ۳ در توابع چند ضابطه‌ای بهترین روش برای بررسی یک به یک بودن رسم تابع است و نمودار یک تابع در صورتی یک به یک است که خطوط موازی محور xها را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



گزینهٔ (۱) غیر یک‌به‌یک — گزینهٔ (۲) غیر یک‌به‌یک — گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک — گزینهٔ (۴) غیر یک‌به‌یک

۳۷ - گزینه ۲

شرط تابع بودن $\rightarrow (۴,۲),(۴,a^۲-a) \Rightarrow a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۲\ ,\ a=-۱$

$a=-۱ \Rightarrow f=\{(۴,۲),(-۱,۵),(b,۲),(-۱,۴)\} \Rightarrow (-۱,۵)\in f\ ,\ (-۱,۴)\in f$

f تابع نمی‌باشد پس $a=-۱$ غیرقابل قبول است.

$a=۲ \Rightarrow f=\{(۴,۲),(۲,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}$

شرط یک‌به‌یک $\Rightarrow (۴,۲),(b,۲) \Rightarrow b=۴ \Rightarrow (a,b)=(۲,۴)$

۳۸ - گزینه ۴ محاسبهٔ وارون توابع:

$y=\dfrac{x+۲}{x-۱} \rightarrow yx-y=x+۲ \rightarrow x(y-۱)=y+۲ \rightarrow x=\dfrac{y+۲}{y-۱}$ ✓

$\{(۱,۲),(۲,۱)\} \rightarrow \{(۲,۱),(۱,۲)\}$ ✓

$y=x \rightarrow x=y$ ✓

$y=-x+b \rightarrow x=-y+b$ ✓

۳۹ - گزینه ۲

ابتدا باید دامنه ی عبارت $\dfrac{-۲f}{g^۲}$ را بیابیم.

$D_{\frac{-۲f}{g^۲}}=D_f\cap D_g-\{g=۰\}=\{۱,-۲\}$

$(\dfrac{-۲f}{g^۲})(۱)=\dfrac{-۲f(۱)}{g^۲(۱)}=\dfrac{-۲(۲)}{۴}=-۱$

$(\dfrac{-۲f}{g^۲})(-۲)=\dfrac{-۲(-۴)}{g^۲(-۲)}=\dfrac{-۲(-۴)}{۴}=۲$

$\dfrac{-۲f}{g^۲}=\{(۱,-۱),(-۲,۲)\}$ مجموع مولفه های دوم: $-۱+۲=۱$

۴۰ - گزینه ۱

با توجه به نمودار f و g داریم: $D_f=(-۳,۳)\ ,\ D_g=[-۱,۱]$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}\ ,\ D_f\cap D_g=[-۱,۱]$

$g(x)=۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱\ ,\ x\neq ۰ \Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-۱,۱]-([-۱,۱]-\{۰\})=\{۰\}$

دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x=۰$ است.

۴۱ - گزینه ۳

ابتدا $fof(x)$ را تشکیل داده و سپس مساوی x قرار می‌دهیم.

$f\left(f(x)\right)=\dfrac{۳f(x)+۱}{f(x)+a}=x \Rightarrow ۳f(x)+۱=xf(x)+ax$

$۳\left(\dfrac{۳x+۱}{x+a}\right)+۱=x\left(\dfrac{۳x+۱}{x+a}\right)+ax \Rightarrow \dfrac{۹x+۳+x+a}{x+a}=\dfrac{۳x^۲+x+ax^۲+a^۲x}{x+a}$

$۱۰x+۳+a=(۳+a)x^۲+(۱+a^۲)x$

$\begin{cases}۱+a^۲=۱۰ \Rightarrow a=\pm ۳\\ ۳+a=۰ \Rightarrow a=-۳\end{cases} \overset{\cup}{\rightarrow} a=-۳$

۴۲ - گزینه ۳

$g(f(x))=۱+\dfrac{۱}{x^۲}$

$g(۱+x^۲)=۱+\dfrac{۱}{x^۲}\ ,\ g(۳)=?\Rightarrow ۱+x^۲=۳ \Rightarrow x=\sqrt{۲} \Rightarrow g(۳)=۱+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۳}{۲}$

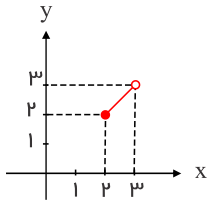
۴۳ - گزینه ۲ می‌دانیم ترکیب هر تابع معکوس‌پذیر با تابع معکوسش، تابع همانی است.

$fof^{-1}(x) = x \ , \ x \in D_{f^{-1}}$ یا $x \in R_f$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x + [x] \Rightarrow f(x) = x + 1$

$1 \le x < 2 \Rightarrow 2 \le x + 1 < 3 \Rightarrow 2 \le f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [2,3)$

$y = fof^{-1}(x) = x \ , \ x \in [2,3) \Rightarrow y = x \ , \ 2 \le x < 3 \Rightarrow$



۴۴ - گزینه ۲ محل تلاقی از حل معادلهٔ $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید.

$f(x) = g(x) \to 4^x = (\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{2} \to 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \ , \ 4^x = k \Rightarrow$

$k = \frac{1}{k} + \frac{3}{2} \to 2k^2 = 2 + 3k \to 2k^2 - 3k - 2 = 0 \to \Delta = 9 + 16 = 25$

$$\to k = \frac{3 \pm 5}{4} \to \begin{cases} k = 2 \to 4^x = 2 \to 2^{2x} = 2 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2} \to y = f(\frac{1}{2}) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \to 4^x = -\frac{1}{2} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = (\frac{1}{2}, 2) \\ B = (-\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \to |AB| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

توجه: اگر $A\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ آنگاه:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

۴۵ - گزینه ۴

هر ۱۵ دقیقه تعداد باکتری‌ها ۲ برابر می‌شود. یعنی در هر ساعت $2^4 = 16$ برابر می‌شود. در ابتدا هم که ۱۰۰ باکتری داشتیم:

$f(t) = Aa^{kt} \Rightarrow f(t) = 100 \times 16^t = 100(2^4)^t = 100 \times 2^{4t}$

۴۶ - گزینه ۴ با توجه به شکل، یک تابع نمایی با روند کاهش داریم پس باید $\frac{3a-1}{a}$ عددی بین صفر و یک باشد، بنابراین داریم:

$$0 < \frac{3a-1}{a} < 1$$

$$(I) = \frac{3a-1}{a} > 0$$

a	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
3a−1	−		−	0	+
a	−	0	+		+
$\frac{3a-1}{a}$	+	ت ن	−	0	+

$\Rightarrow a < 0$ یا $a > \frac{1}{3}$

$$(II) : \frac{3a-1}{a} < 1 \Rightarrow \frac{3a-1}{a} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2a-1}{a} < 0$$

a	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
2a−1	−		−	0	+
a	−	0	+		+
$\frac{2a-1}{a}$	+	ت ن	−	0	+

$\Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$

بین محدوده جواب‌های I و II اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) : \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$$

۴۷ - گزینه ۳ در تابع نمایی $f(x) = a^x + b$ ، اگر با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع f افزایش یابند، آنگاه $a > 1$ می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$۲m^۲ - m > ۱ \Rightarrow ۲m^۲ - m - ۱ > ۰ \Rightarrow (۲m + ۱)(m - ۱) > ۰$

$\Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup (۱, +\infty)$

۴۸ - گزینه ۱ نکته: برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y = \log_{g(x)}^{f(x)}$ باید $f(x) > ۰$ و $g(x) > ۰$ و $g(x) \neq ۰$ قرار دهیم.

$(I) \quad x \neq ۱ \quad , \quad x > ۰ \quad , \quad x^۲ - ۴ > ۰$

$\Rightarrow \quad x^۲ - ۴ > ۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲ > ۴ \quad \Rightarrow \quad x > ۲ \cup x < -۲ \quad (II)$

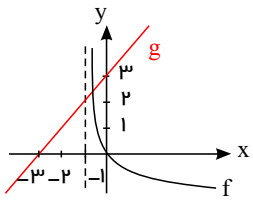
$(I) \cap (II) \quad : \quad x > ۲$

۴۹ - گزینه ۲ به روش هندسی داریم:

$\log_{۰/۲}(x + ۱) = x + ۳$

$f(x) = \log_{۰/۲}(x + ۱)$

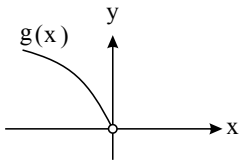
$g(x) = x + ۳$



معادله یک ریشه‌ی منفی دارد.

۵۰ - گزینه ۱

ابتدا دامنهٔ f را می‌یابیم. $x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱$. ضمناً نمودار g به صورت روبرو است.



طبق تعریف دامنهٔ gof داریم:

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

$D_{gof} = \{x > ۱ | \log(x - ۱) < ۰\}$

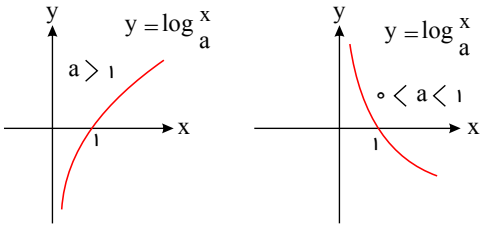
$\log(x - ۱) < ۰ \Rightarrow x - ۱ < ۱$

$\Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با } x>۱} ۱ < x < ۲$

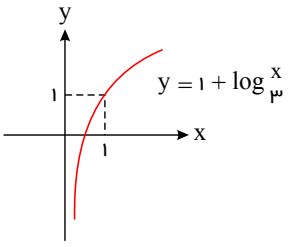
لذا حداکثر مقدار $b - a$ به صورت $۲ - ۱ = ۱$ خواهد بود.

۵۱ - گزینه ۱

تابع $y = \log_a^x$ یک‌به‌یک است و برای xهای منفی تعریف نمی‌شود.



در گزینهٔ «۳» تابع $y = ۱ + \log_۳^x$ محور xها را قطع می‌کند.



اگر پایهٔ لگاریتم بین صفر و یک باشد، مقدار لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از یک منفی می‌شود. پس گزینهٔ «۱» نادرست است.

۵۲ - گزینه ۲

$y = \log_۲^{(x+a)} - b \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y = \log_۲^{(x+a)} - b + ۲ \xrightarrow[x \to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}} y = \log_۲^{(x+۳+a)} - b + ۲$

$$\left.\begin{array}{l}\text{دامنه از روی شکل}: x > -۲ \\ \text{دامنه از روی ضابطه}: x + ۳ + a > ۰ \Rightarrow x > -۳ - a\end{array}\right\} \Rightarrow -۳ - a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$y = \log_{۲}^{(x+۲)} - b + ۲ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = ۲ \end{array} \right. \Rightarrow ۲ = \log_{۲}^{۲} - b + ۲ \Rightarrow ۰ = ۱ - b \Rightarrow b = ۱$$

$$a - b = -۱ - ۱ = -۲$$

۵۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n \log_k^a}$

دقت کنید که $(۱ + \sqrt{۲})^۲ = ۱ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۳ + ۲\sqrt{۲}$ است.

$$\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۳+۲\sqrt{۲})^۳} = \log_{(۱+\sqrt{۲})}^{((۱+\sqrt{۲})^۲)^۳} = \log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۱+\sqrt{۲})^۶} = ۶$$

۵۴ - گزینه ۱

$$\frac{\log_{۳}^{۲^۴}}{\log_{۵}^{۸\times۴}} = \frac{۴\log_{۳}^{۲}}{\log_{۵}^{۲^۵}} = \frac{۴\log_{۳}^{۲}}{۵\log_{۵}^{۲}} = \frac{۴}{۵} \times \frac{\frac{\log ۲}{\log ۳}}{\frac{\log ۲}{\log ۵}} = \frac{۴}{۵} \times \frac{\log ۵}{\log ۳} = \frac{۴}{۵}\log_{۳}^{۵}$$

۵۵ - گزینه ۴

$$A = (\log ۲)^۳ + (\log ۲^۳)(\log ۵) + (\log ۵)^۳ = (\log ۲)^۳ + ۳\log ۲ \log ۵ + (\log ۵)^۳$$

باتوجه به این‌که $\log(۲ \times ۵) = \log ۲ + \log ۵ = ۱$ داریم:

$$A = (\log ۲)^۳ + ۳(\log ۲ + \log ۵)\log ۲ \log ۵ + (\log ۵)^۳$$

ازطرفی طبق اتحاد مقابل داریم: $(x + y)^۳ = x^۳ + ۳xy(x + y) + y^۳$

$$A = (\log ۲ + \log ۵)^۳ = (\log ۲ \times ۵)^۳ = (\log ۱۰)^۳ = ۱^۳ = ۱$$

$$\log_{(۳A+۵)}^{(۳A+۱)} = \log_{۸}^{۴} = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \frac{۲}{۳}$$

۵۶ - گزینه ۳ اول: دو لگاریتم را یکی می‌کنیم:

$$\log_{\frac{۱}{۳}}^{(x-۲)(x-۴)} < -۱$$

چون $\frac{۱}{۳}$ از ۱ کوچک‌تر است، جهت علامت را عوض می‌کنیم:

$$(x-۲)(x-۴) > ۳ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۸ > ۳ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۵ > ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۱) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۵ \\ x < ۱ \end{cases}$$

دوم: به دامنهٔ تابع دقت می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \\ x - ۴ > ۰ \Rightarrow x > ۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x > ۴$$

پس مجموعه جواب معادله $(۵, +\infty)$ است که اعداد صحیح ۹ و ۸ و ۷ و ۶ در آن کم‌تر از ۱۰ هستند.

۵۷ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a \ , \ \log_b^a = k \to a = b^k$$

$$(\log_{۹}^{x^۲})^۲ - ۲۱\log_{۲۷}^{x} = -۱۲ \to (\log_{۳^۲}^{x^۲})^۲ - ۲۱\log_{۳^۳}^{x} + ۱۲ = ۰$$

$$(\frac{۲}{۲}\log_{۳}^{x})^۲ - \frac{۲۱}{۳}\log_{۳}^{x} + ۱۲ = ۰ \to (\log_{۳}^{x})^۲ - ۷\log_{۳}^{x} + ۱۲ = ۰$$

$$\log_{۳}^{x} = A \to A^۲ - ۷A + ۱۲ = ۰ \to (A-۳)(A-۴) = ۰$$

$$A = ۳ \ , \ A = ۴ \to \log_{۳}^{x} = ۳ \to x = ۳^۳ = ۲۷ \ , \ \log_{۳}^{x} = ۴ \to x = ۳^۴ = ۸۱$$

$$(\log_{۳}^{\alpha})^۲ + (\log_{۳}^{\beta})^۲ = (\log_{۳}^{۲۷})^۲ + (\log_{۳}^{۸۱})^۲ = (\log_{۳}^{۳^۳})^۲ + (\log_{۳}^{۳^۴})^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵$$

روش دوم:

$$A^۲ - ۷A + ۱۲ = ۰$$

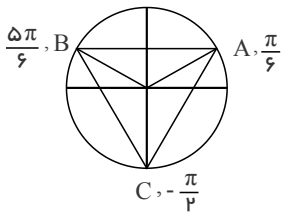
$$\underset{\text{مجموع ریشه‌ها}}{S} = ۷, \quad \underset{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}}{P} = ۱۲$$

$$\begin{matrix} A_۱ = \log_۳^{\alpha} \\ A_۲ = \log_۳^{\beta} \end{matrix} \rightarrow A_۱^۲ + A_۲^۲ = S^۲ - ۲P = ۴۹ - ۲۴ = ۲۵$$

۵۸ - گزینه ۱

طول کمان مقابل به زاویه ۲۰° $= \frac{۲۰}{۳۶۰} \times ۲\pi r = \frac{۱}{۱۸} \times ۲\pi \times ۴ = \frac{۸\pi}{۱۸} = \frac{۴\pi}{۹} cm$

۵۹ - گزینه ۲ انتهای کمان‌های روبه زوایای $\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{۵\pi}{۶} = \pi - \frac{\pi}{۶}$ ، $-\frac{\pi}{۲}$ را در دایرهٔ مثلثاتی تعیین می‌کنیم.



$$\widehat{AB} = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{C} = \frac{۱}{۲}\widehat{AB} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$$
$$\widehat{AC} = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{B} = \frac{۱}{۲}\widehat{AC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$$
$$\widehat{BC} = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱}{۲}\widehat{BC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$$

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶۰ - گزینه ۳ این چرخ در یک ساعت زاویهٔ $۳۰۰۰ \times ۲\pi$ رادیان را طی می‌کند. می‌توان نوشت:

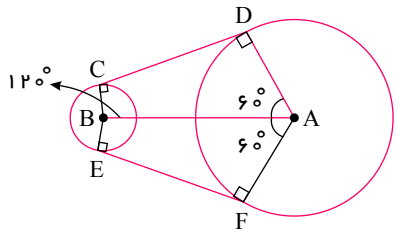
ثانیه	رادیان
۳۶۰۰	$۳۰۰۰ \times ۲\pi$
۱ ثانیه	x

$$\Rightarrow x = \frac{۳۰۰۰ \times ۲\pi}{۳۶۰۰} = \frac{۶۰\pi}{۳۶} = \frac{۵\pi}{۳}$$

پس بعد از گذشت یک ثانیه چرخ زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان را طی می‌کند.

۶۱ - گزینه ۴

اول: در چهارضلعی $ABCD$ مجموع زوایای داخلی ۳۶۰ درجه است. پس زاویه $B = ۱۲۰^\circ$ است.



دقت کنید که خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است. $(\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ)$

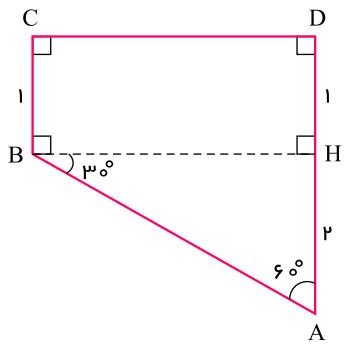
دوم: با توجه به تقارن شکل کمان CE که تسمه روی آن قرار گرفته $\widehat{CE} = ۱۲۰^\circ$ است.

$$\widehat{CE} = ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳} rad \Rightarrow |\widehat{CE}| = r\theta = ۱(\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین کمان $\widehat{DF}$ که تسمه روی آن قرار گرفته است، $\widehat{DF} = ۲۴۰^\circ$ است.

$$\widehat{DF} = ۲۴۰^\circ = \frac{۴\pi}{۳} rad \rightarrow |\widehat{DF}| = r\theta = ۳(\frac{۴\pi}{۳}) = ۴\pi$$

سوم: در چهارضلعی $ABCD$ اگر از نقطهٔ B بر ضلع AD عمودی رسم کنیم، چهارضلعی $BCDH$ مستطیل خواهد شد. $CD = BH$



چهارم: در مثلث ABH داریم:

$$\frac{AH}{BH} = \tan ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{۲}{BH} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow BH = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow CD = ۲\sqrt{۳}$$

و با توجه به تقارن شکل داریم $EF = ۲\sqrt{۳}$، درنهایت طول تسمه برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{۳}+۴\pi+۲(۲\sqrt{۳})=۴\sqrt{۳}+\frac{۱۴\pi}{۳}$$

۶۲ ـ گزینه ۲

$$\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۷\pi}{۸}$$
$$=\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸})+\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۸})$$
$$\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۲\frac{\pi}{۸}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}$$
$$=(\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\cos^۲\frac{\pi}{۸})+(\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۸})=۱+۱=۲$$

۶۳ ـ گزینه ۴

$$\cos(\frac{۵\pi}{۲}+\theta)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow-\sin\theta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\theta=-\frac{۳}{۵}$$

$$A=۲\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)+\cos(۳\pi-\theta)=۲\sin(\pi+\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos(۲\pi+\pi-\theta)$$

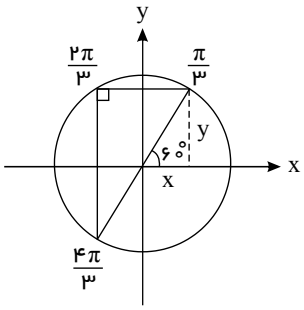
$$A=-۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos(\pi-\theta)=-۲\cos\theta-\cos\theta=-۳\cos\theta$$

$$\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta=۱-(-\frac{۳}{۵})^۲=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۴}{۵}$$

$$\cos\theta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow A=-۳\times\frac{۴}{۵}=-\frac{۱۲}{۵}$$

$$\cos\theta=-\frac{۴}{۵}\Rightarrow A=-۳\times(-\frac{۴}{۵})=\frac{۱۲}{۵}\Rightarrow A_{\max}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۶۴ ـ گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، از آنجا که $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin\frac{\pi}{۳}$ و $\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos\frac{۴\pi}{۳}$ می‌باشد، مثلث ایجاد شده یک مثلث قائم‌الزاویه است. حال طول اضلاع قائم آن را به‌دست می‌آوریم:



$$y=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ x=\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به آن که $\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\sin\frac{\pi}{۳}=-y$ و $\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\cos\frac{\pi}{۳}=-x$ است، پس:

$$\text{اضلاع قائم}=۲y=\sqrt{۳}\ ,\ ۲x=۱$$

$$\Rightarrow\text{مساحت مثلث}=\frac{۲x\times۲y}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۵ ـ گزینه ۲ زاویه‌ها را برحسب ۲۲° می‌نویسیم.

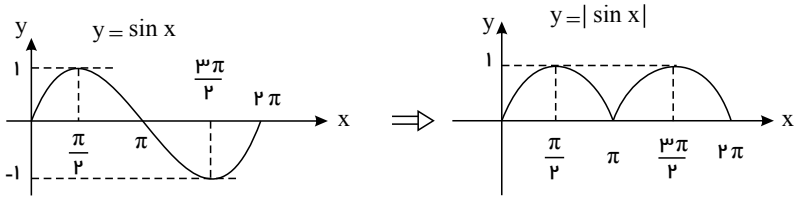
$$\frac{\sin(۱۸۰^\circ+۹۰^\circ+۲۲^\circ)-۳\cos(۱۸۰^\circ-۲۲^\circ)}{۲\sin(۳۶۰^\circ-۲۲^\circ)+\sin(۹۰^\circ+۲۲^\circ)}=\frac{-\sin(۹۰^\circ+۲۲^\circ)+۳\cos۲۲^\circ}{۲\sin(-۲۲^\circ)+\cos۲۲^\circ}$$

$$=\frac{-\cos۲۲^\circ+۳\cos۲۲^\circ}{-۲\sin۲۲^\circ+\cos۲۲^\circ}=\frac{۲\cos۲۲^\circ}{\cos۲۲^\circ-۲\sin۲۲^\circ}$$

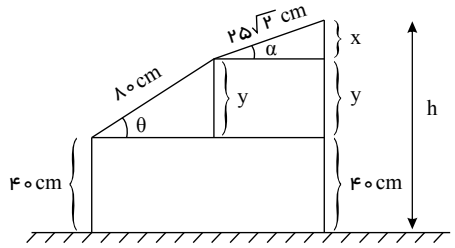
صورت و مخرج کسر فوق را بر $\cos۲۲^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۲\cos ۲۲^\circ}{\cos ۲۲^\circ}}{\frac{\cos ۲۲^\circ}{\cos ۲۲^\circ}-\frac{۲\sin ۲۲^\circ}{\cos ۲۲^\circ}}=\frac{۲}{۱-۲\tan ۲۲^\circ}=\frac{۲}{۱-۲a}$$

۶۶ - گزینه ۱



۶۷ - گزینه ۲ با توجه به شکل زیر داریم:



$$\sin\alpha=\frac{x}{۲۵\sqrt{۲}}\Rightarrow x=۲۵\sqrt{۲}\sin\alpha\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{۸۰}\Rightarrow y=۸۰\sin\theta$$

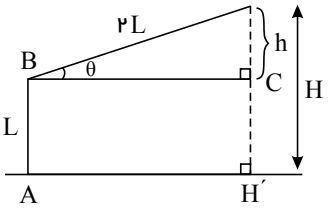
$$h=۴۰+x+y=۴۰+۲۵\sqrt{۲}\sin\alpha+۸۰\sin\theta$$

$$\Rightarrow h=۴۰+۲۵\sqrt{۲}\sin(-۴۵^\circ)+۸۰\sin(۰)=۴۰-۲۵\sqrt{۲}\sin ۴۵^\circ+۰$$

$$\Rightarrow h=۴۰-۲۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۴۰-۲۵=۱۵$$

۶۸ - گزینه ۳ ابتدا ارتفاع نوک گیرهٔ این روبات تا سطح زمین را به‌صورت تابعی از θ می‌نویسیم:

$$h=۲L\sin\theta\Rightarrow H=L+۲L\sin\theta$$



می‌دانیم بیش‌ترین مقدار ممکن زمانی رخ می‌دهد که $\sin\theta=۱$ باشد که در این‌صورت: $H=۳L$

پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

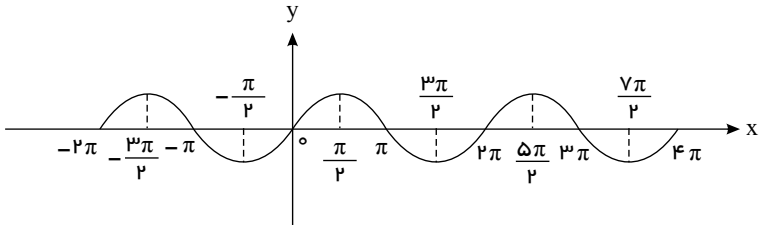
$$H=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow L+۲L\sin\theta=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow ۲L\sin\theta=\frac{L}{۲}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

درنتیجه:

$$AH'=BC=۲L\cos\theta=۲L\times\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}L$$

۶۹ - گزینه ۲ نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم:



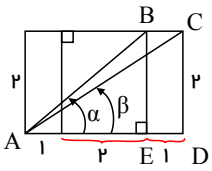
با توجه به گزینه‌ها، تابع $y=\sin x$ با دامنهٔ $(-\frac{۴\pi}{۳},-\frac{\pi}{۲})$ یک به یک است.

۷۰ - گزینه ۴

$$\sin^۲x+\cos^۲۲x-۲\sin x\cos ۲x+\cos^۲x+\sin^۲۲x-۲\cos x\sin ۲x$$
$$=\sin^۲x+\cos^۲x+\sin^۲۲x+\cos^۲۲x-\underbrace{۲(\sin x\cos ۲x+\cos x\sin ۲x)}_{\sin(x+۲x)}=۲-۲\sin ۳x$$

می‌دانیم $-۱\le\sin ۳x\le ۱$ می‌باشد، بنابراین بیشترین مقدار عبارت داده شده هنگامی رخ می‌دهد که $\sin ۳x=-۱$ باشد، بنابراین $Max=۲-۲(-۱)=۴$

۷۱ - گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABE}: AB^۲=۲^۲+۳^۲=۴+۹=۱۳\to AB=\sqrt{۱۳}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲=۲^۲+۴^۲=۴+۱۶=۲۰\to AC=\sqrt{۲۰}$$

$$\overset{\Delta}{ABE}: \cos\alpha=\frac{AE}{AB}=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\quad,\quad \sin\alpha=\frac{BE}{AB}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: \cos\beta=\frac{AD}{AC}=\frac{۴}{\sqrt{۲۰}}\quad,\quad \sin\beta=\frac{CD}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}$$

$$\cos x=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۴}{\sqrt{۲۰}}+\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}$$

$$=\frac{۱۲+۴}{\sqrt{۱۳}\times ۲\sqrt{۵}}=\frac{۸}{\sqrt{۶۵}}$$

۷۲ - گزینه ۴

می‌دانیم $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲x$

$$\frac{۱}{a\sin^۲x+\underbrace{۱-\cos ۲x}_{۲\sin^۲x}}=\frac{۱}{a\sin^۲x+۲\sin^۲x}=\frac{۱}{(a+۲)\sin^۲x}\Rightarrow\begin{cases}a\neq -۲\\ \sin^۲x\neq ۰\end{cases},\ \Rightarrow x\neq k\pi$$

چون همواره $\sin^۲x$ دارای جواب $x=k\pi$, است لذا دامنه ی کسر هرگز $\mathbb{R}$ نخواهد بود.

۷۳ - گزینه ۴

می‌دانیم $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$
$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۶}{۹}\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\sin ۲x=-\frac{۱}{۳}$$
$$\frac{\tan x}{۱+\tan^۲x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos^۲x}}=\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x=-\frac{۱}{۶}$$

۷۴ - گزینه ۴ در گزینه‌های ۱ و ۳ تابع در همسایگی نقطهٔ $x=۱$ تعریف نشده است.

گزینهٔ ۲ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۲\quad \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=-۱\Rightarrow$ حد ندارد $\quad x=۱$ تابع در

گزینهٔ ۴ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۲$

۷۵ - گزینه ۲

فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=L_۲$ و $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=L_۱$ بنابراین:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲}(f+g)(x)=L_۱+L_۲=۲\ \ (۱)\\ \lim\limits_{x\to ۲}(f^۲-g^۲)(x)=(L_۱+L_۲)(L_۱-L_۲)=۶\xrightarrow{(۱)}L_۱-L_۲=۳\ \ (۲)\end{cases}$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}L_۱-L_۲=۳\\ L_۱+L_۲=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_۱=۲/۵\\ L_۲=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $t=۲x-۲$، بنابراین:

$$۲x=t+۲$$
$$x\to ۲: t\to ۲$$

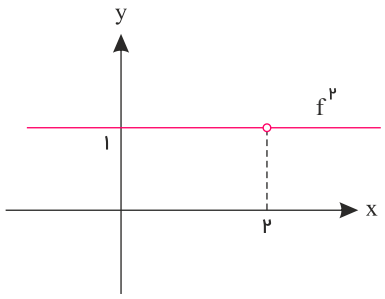
آن‌گاه:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{f(۲x-۲)}=\lim_{t\to ۲}\sqrt{f(t)}=\sqrt{L_۱}\xrightarrow{L_۱=۲/۵}\sqrt{۲/۵}$$

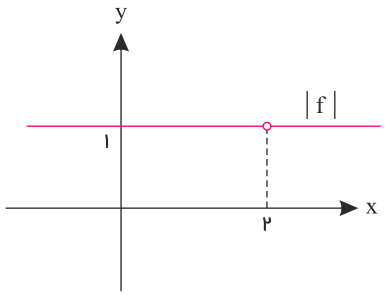
۷۶ - گزینه ۳ راهنمایی: نمودار تک‌تک گزینه‌ها قابل رسم است.

بررسی گزینه‌ها:

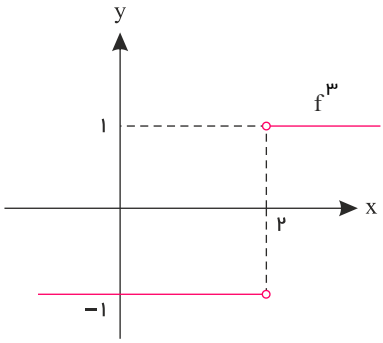
گزینهٔ ۱: در $x=۲$ حد دارد.



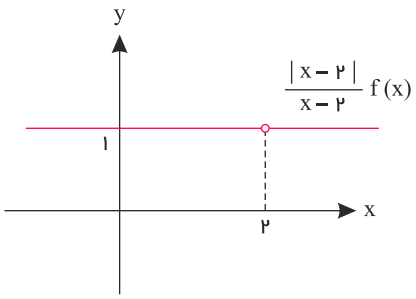
گزینهٔ ۲: در $x=۲$ حد دارد.



گزینهٔ ۳: در $x=۲$ حد ندارد.



گزینهٔ ۴: $f(x)=\begin{cases} f & x>۲ \\ -f & x<۲ \end{cases}\cdot\frac{|x-۲|}{x-۲}$ در $x=۲$ حد دارد.



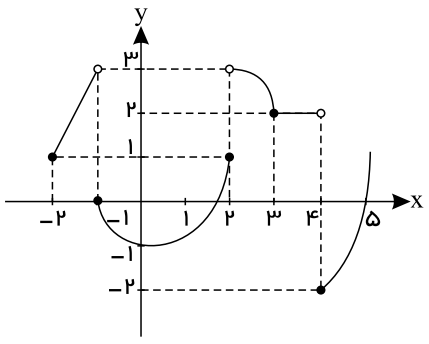
۷۷ - گزینه ۴ حاصل گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲+(-۱)=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳/۵} f(x)-\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=۲-۱=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۳=۱$

۴) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳-۱=۲$



پس حاصل گزینهٔ «۴» با بقیه متفاوت است.

۷۸ - گزینه ۴

برای اینکه تابع در $x=۲$ حد داشته باشد باید حد راست و چپ تابع در $x=۲$ برابر باشد. پس داریم:

$$L^- = \lim_{x\to ۲^-} [x] + ۳ = [۲^-] + ۳ = ۱ + ۳ = ۴$$

$$L^+ = \lim_{x\to ۲^+} (mx - ۲) = ۲m - ۲ \Rightarrow ۲m - ۲ = ۴ \Rightarrow m = ۳$$

۷۹ - گزینه ۳

$$L^- = \lim_{x\to (-۲)^-} m[-x] + ۳x = m[-(-۲ - \varepsilon)] + ۳(-۲) = m[۲ + \varepsilon] - ۶ = ۲m - ۶$$

$$L^+ = \lim_{x\to (-۲)^+} ۲[x^۲] + m = ۲[(-۲ + \varepsilon)^۲] + m = ۲[۴ - ۴\varepsilon + \varepsilon^۲] + m = ۲ \times ۳ + m = ۶ + m$$

$$\Rightarrow ۲m - ۶ = m + ۶ \Rightarrow m = ۱۲$$

$$\lim_{x\to (-۳)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۳)^+} m[-x] + ۳x = ۱۲[-(-۳ + \varepsilon)] + ۳(-۳) = ۱۲[۳ - \varepsilon] - ۹$$

$$= ۱۲ \times ۲ - ۹ = ۲۴ - ۹ = ۱۵$$

۸۰ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰} [\frac{۱}{f(x)}] = \lim_{x\to ۰} [\frac{۱}{۱^-}] = [۱^+] = ۱$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} [f^۲(x)] = [(۰^-)^۲] = [۰^+] = ۰$$

$$\lim_{x\to ۱^-} [f(x)] = [۰^-] = -۱$$

$$\Rightarrow ۱ - ۰ + (-۱) = ۰$$

۸۱ - گزینه ۴ ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \underset{x<۲\Rightarrow ۳x<۶}{(a+۱)[۶^-]} + \underset{x<۲\Rightarrow -\frac{x}{۲}>-۱}{(۲a-۴)[(-۱)^+]} = (a+۱)(۵) + (۲a-۴)(-۱)$$

$$= ۵a + ۵ - ۲a + ۴ = ۳a + ۹$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \underset{x>۲\Rightarrow ۳x>۶}{(a+۱)[۶^+]} + \underset{x>۲\Rightarrow \frac{-x}{۲}<-۱}{(۲a-۴)[(-۱)^-]} = (a+۱)(۶) + (۲a-۴)(-۲)$$

$$= ۶a + ۶ - ۴a + ۸ = ۲a + ۱۴$$

$$\text{شرط وجود حد} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow ۳a + ۹ = ۲a + ۱۴ \Rightarrow a = ۵$$

پس $a^۲ - ۵a$ برابر صفر است.

دقت کنید می‌توان با عددگذاری برای مقادیر کمتر از ۲ و نزدیک به ۲ و بیشتر از ۲ و نزدیک به ۲ نیز، حاصل حدهای براکتی را به‌دست آورد.

۸۲ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱۳} - ۲\sqrt{x+۱}}{x^۲ - ۹} = \frac{۰}{۰}$$

صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{(\sqrt{x+۱۳} - ۲\sqrt{x+۱})(\sqrt{x+۱۳} + ۲\sqrt{x+۱})}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱۳} + ۲\sqrt{x+۱})}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{(x+۱۳) - ۴(x+۱)}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱۳} + ۲\sqrt{x+۱})} = \lim_{x\to ۳} \frac{-۳x + ۹}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱۳} + ۲\sqrt{x+۱})}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{-۳\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{x+۱۳} + ۲\sqrt{x+۱})} = \frac{-۳}{۶ \times (۴+۴)} = -\frac{۱}{۱۶}$$

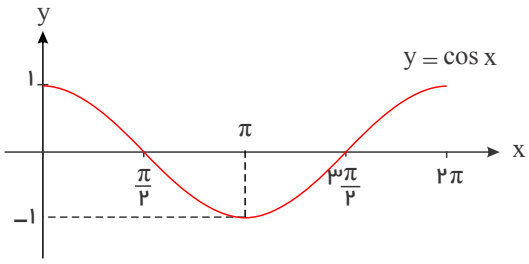
۸۳ - گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x=۱$ موجود و باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x\to ۱^-} ax - a + b = a - a + b = b \\ \text{حد راست} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - ۱)}{(\sqrt{x} - ۱)(\sqrt{x} + ۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

۸۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin ۲x}{۲x} \times \frac{\sin ۳x}{۳x} \times x \times ۲x \times ۳x}{۵x^۳} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱ \times ۱ \times ۱ \times ۶x^۳}{۵x^۳} = \frac{۶}{۵}$$

۸۵ - گزینه ۱ باتوجه به شکل وقتی $x \to \frac{\pi^+}{۲}$ میل می‌کند، مقادیر تابع $y = \cos x$ از مقادیر کم‌تر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شود.



$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x + [\cos x]}{\cos^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x + [۰^-]}{\cos^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x - ۱}{\cos^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x - ۱}{۱ - \sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x - ۱}{(۱ - \sin x)(۱ + \sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{-۱}{۱ + \sin x} = \frac{-۱}{۱ + ۱} = -\frac{۱}{۲}$$

۸۶ - گزینه ۲ کافی است حد چپ و راست تابع را در $x_۰ = ۱$ به دست آورده و با $f(۱)$ مقایسه نماییم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۴)}{\sqrt{(x-۱)^۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۴)}{|x-۱|} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۴)}{(x-۱)} = ۵$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۴)}{|x-۱|} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۴)}{-(x-۱)} = -۵$$

با توجه به این که $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) = -۵$ تابع f در $x_۰ = ۱$ از چپ پیوسته است.

۸۷ - گزینه ۲

$$f(-۳) = [۹] = ۹$$

$$L^- = \lim_{x\to(-۳)^-} [x^۲] = [(-۳-\varepsilon)^۲] = [۹ + ۶\varepsilon + \varepsilon^۲] = ۹$$

$$L^+ = \lim_{x\to(-۳)^+} [x^۲] = [(-۳+\varepsilon)^۲] = [۹ - ۶\varepsilon + \varepsilon^۲] = [۹ - ۶\varepsilon] = ۸$$

$L^- = f(-۳) \neq L^+ \Rightarrow$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۸۸ - گزینه ۳ حاصل‌ضرب دو تابع پیوستهٔ fg و $\frac{f}{g}$ یعنی $f^۲$ تابعی است پیوسته.

۸۹ - گزینه ۴

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{a|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{a(-x)}{x} = -a$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{a|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{x} = a$$

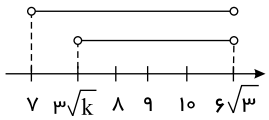
$f(۰) = ۱ \Rightarrow a = -a = ۱ \Rightarrow$ مقداری برای a وجود ندارد. $\Rightarrow$ غیرممکن است.

۹۰ - گزینه ۳

$$f(x) = [۳\sqrt{x}], x \in (k, ۱۲)$$

$$k < x < ۱۲ \Rightarrow \sqrt{k} < \sqrt{x} < \sqrt{۱۲} \Rightarrow \sqrt{k} < \sqrt{x} < ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۳\sqrt{k} < ۳\sqrt{x} < ۶\sqrt{۳} \Rightarrow ۳\sqrt{k} < ۳\sqrt{x} < ۱۰٫۴$$

برای این که $۳\sqrt{x}$ شامل ۳ عدد صحیح شود باید $۸ \leq ۳\sqrt{k} < ۷$ که کمترین مقدار k زمانی است که داشته باشیم.



$$۳\sqrt{k} = ۷ \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{۷}{۳} \to k = \frac{۴۹}{۹}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳
۲ - ۲
۳ - ۴
۴ - ۲
۵ - ۲
۶ - ۳
۷ - ۱
۸ - ۴
۹ - ۲
۱۰ - ۱
۱۱ - ۱
۱۲ - ۲
۱۳ - ۲
۱۴ - ۱
۱۵ - ۲
۱۶ - ۳
۱۷ - ۲
۱۸ - ۱
۱۹ - ۲
۲۰ - ۲
۲۱ - ۲
۲۲ - ۲
۲۳ - ۲
۲۴ - ۳
۲۵ - ۲
۲۶ - ۲
۲۷ - ۱
۲۸ - ۳
۲۹ - ۲
۳۰ - ۲
۳۱ - ۴
۳۲ - ۳
۳۳ - ۳
۳۴ - ۴
۳۵ - ۲
۳۶ - ۳
۳۷ - ۲
۳۸ - ۴
۳۹ - ۲
۴۰ - ۱
۴۱ - ۳
۴۲ - ۳
۴۳ - ۲
۴۴ - ۲
۴۵ - ۴
۴۶ - ۴
۴۷ - ۳
۴۸ - ۱
۴۹ - ۲
۵۰ - ۱
۵۱ - ۱
۵۲ - ۲
۵۳ - ۳
۵۴ - ۱
۵۵ - ۴
۵۶ - ۳
۵۷ - ۳
۵۸ - ۱
۵۹ - ۲
۶۰ - ۳
۶۱ - ۴
۶۲ - ۲
۶۳ - ۴
۶۴ - ۴
۶۵ - ۲
۶۶ - ۱
۶۷ - ۲
۶۸ - ۳
۶۹ - ۲
۷۰ - ۴
۷۱ - ۱
۷۲ - ۴
۷۳ - ۴
۷۴ - ۴
۷۵ - ۲
۷۶ - ۳
۷۷ - ۴
۷۸ - ۴
۷۹ - ۳
۸۰ - ۳
۸۱ - ۴
۸۲ - ۱
۸۳ - ۴
۸۴ - ۴
۸۵ - ۱
۸۶ - ۲
۸۷ - ۲
۸۸ - ۳
۸۹ - ۴
۹۰ - ۳