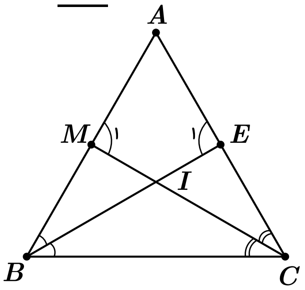
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه دهم فصل ۱

دبیرستان سپهر دانش

۱ - در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطهٔ I قطع کرده‌اند. اگر $BI > CI$، آنگاه کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر لزوماً درست نیست؟



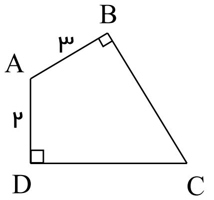
(۱) $AB > AC$

(۲) $\hat{E}_۱ > \hat{M}_۱$

(۳) $\hat{C} > \hat{B}$

(۴) $IE < IM$

۲ - در چهارضلعی $ABCD$ زوایای B و D قائمه‌اند. امتداد دو ضلع BC و AD یکدیگر را در نقطهٔ M و امتداد دو ضلع AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ N قطع می‌کنند. کدام گزینه همواره صحیح است؟



(۱) AC از وسط MN می‌گذرد.

(۲) AC بر MN عمود است.

(۳) AC پاره‌خط MN را به نسبت ۲ به ۳ قطع می‌کند.

(۴) اگر E محل برخورد AC و MN باشد، BDE متساوی‌الاضلاع است.

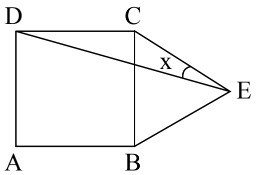
۳ - با معلومات $BC = ۲$، $m_b = ۶$ و $m_c = ۹$، چند مثلث قابل رسم است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۴ - در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $\left(\hat{A} = ۹۰^\circ\right)$، AD نیمساز زاویهٔ داخلی A و $AB < AD < AC$ است. اگر اندازهٔ زاویهٔ B در بازهٔ (α, β) قرار داشته باشد، بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

(۱) ۱۵° (۲) $۲۲/۵^\circ$ (۳) ۳۰° (۴) $۳۷/۵^\circ$

۵ - در شکل زیر $ABCD$ مربع و BEC مثلث متساوی‌الاضلاع است. اندازه زاویه‌ی x کدام است؟



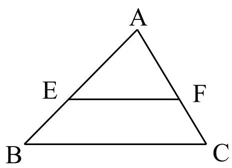
(۱) ۱۵° (۲) ۲۰°

(۳) ۲۵° (۴) ۳۰°

۶ - در مثلث ABC طول نیمساز زاویهٔ A برابر ضلع AB است. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $\hat{B} = \hat{C}$ (۲) $\hat{B} > \hat{C}$ (۳) $\hat{B} < \hat{C}$ (۴) $۲\hat{B} = \hat{C}$

۷ - در مثلث ABC، EF موازی BC است. اگر نقطه‌ی I روی EF از سه ضلع مثلث به یک فاصله باشد، $BE + CF$ کدام است؟



(۱) AB (۲) AC

(۳) BC (۴) EF

۸ - در مثلث ABC، $\hat{C} < ۴۵^\circ$، $۴۵^\circ < B < ۹۰^\circ$ می‌باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و $BH = ۴$، $CH = ۶$ هستند. مساحت مثلث کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۹ - کدام‌یک از قضیه‌های زیر را نمی‌توان به‌صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟

(۱) اگر در مثلث ABC، $AB > AC$ باشد، آن‌گاه $\widehat{C} > \widehat{B}$ است.

(۲) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

(۳) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه هم‌مساحت‌اند.

(۴) اگر دو دایره محیط‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه مساحت برابر دارند.

۱۰ - در اثبات حکم «عمودمنصف هر پاره‌خط یکتاست.» به روش برهان خلف، تناقض پدید آمده کدام است؟

۱) از یک نقطه خارج یک خط، دو خط به موازات آن خط رسم شده است.
۲) از یک نقطه خارج یک خط، دو خط بر آن خط عمود رسم شده است.
۳) مجموع زوایای یک مثلث بیش‌تر از ۱۸۰° رسم شده است.
۴) دو خط متقاطع، موازی یکدیگر شده‌اند.

۱۱ - نقطهٔ O درون مثلث ABC ، از سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازهٔ زاویهٔ BOC برحسب $\hat{A}$ کدام است؟

۱) $۱۸۰^\circ - \hat{A}$
۲) $۹۰^\circ + \hat{A}$
۳) $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$
۴) $۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$

۱۲ - اگر $m_a = ۲m - ۱\ ,\ m_b = m + ۴\ ,\ m_c = ۵m + ۱$ میانه‌های مثلث ABC باشند، آنگاه حدود m کدام است؟

۱) $۰ < m < \frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳} < m < ۱$
۳) $m < ۱$
۴) $\frac{۲}{۳} < m$

۱۳ - اعداد c, b, a طول اضلاع یک مثلث هستند. کدام گزینه درست نیست؟

۱) $۳c, ۳b, ۳a$ همواره طول اضلاع یک مثلث هستند.
۲) $c + ۳, b + ۳, a + ۳$ همواره طول اضلاع یک مثلث هستند.
۳) $c + ۹, b + ۶, a + ۳$ همواره طول اضلاع یک مثلث هستند.
۴) $c + ۱۲, b + ۶, a + ۳$ همواره طول اضلاع یک مثلث هستند.

۱۴ - نقیض کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های یک مثلث درون یا بیرون آن مثلث است.
۲) هر زاویهٔ خارجی یک مثلث از زاویهٔ داخلی مجاورش کوچک‌تر نیست.
۳) مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث ۳۶۰° است.
۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است.

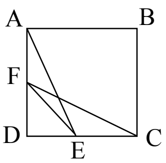
۱۵ - نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد از خط d واقع است. برای رسم خطی عمود بر خط d از نقطهٔ A، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۱۰ واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند و سپس از نقاط B و C دو کمان به شعاع R رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطهٔ E و F قطع نمایند. R کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

۱۶ - در مثلث ABC، $B\widehat{A}C = ۵۰^\circ$ و $AB > AC$ ، بزرگ‌ترین مقدار صحیح $\widehat{B}$ برحسب درجه کدام است؟

۱) ۶۲
۲) ۶۳
۳) ۶۴
۴) ۶۵

۱۷ - در شکل مقابل $ABCD$ مربع بوده و $AE = CF$ می‌باشد اگر $D\hat{A}E = ۱۵^\circ$ باشد، آنگاه $C\hat{F}E$ چند درجه است؟



۱) ۱۵
۲) ۲۲٫۵
۳) ۳۰
۴) ۴۵

۱۸ - در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد، O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها است. فاصلهٔ O از ضلع بزرگ‌تر این مثلث چند واحد است؟

۱) ۰٫۶۲۵
۲) ۰٫۷۵
۳) ۰٫۸۷۵
۴) ۱

۱۹ - در یک مثلث متساوی الساقین زاویه‌ی رأس، از سه برابر هر کدام از زاویه‌های دیگر به اندازه‌ی ۱۰° بیشتر است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها، امتداد ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

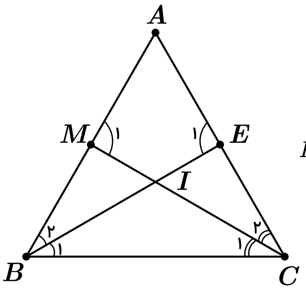
۱) ۳۹°
۲) ۶۸°
۳) ۷۳°
۴) ۳۴°

۲۰ - در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول قاعدهٔ کوچک (CD) با طول ساق‌ها برابر و زاویهٔ بین دو قطر AC و BD برابر ۳۰° است. زاویهٔ منفرجهٔ ذوزنقه چند درجه است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۳۵
۴) ۱۱۵٫۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است:

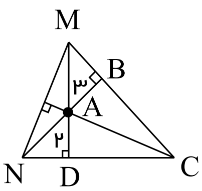


$$\overset{\Delta}{BIC} : BI > CI \to \hat{C}_۱ > \hat{B}_۱ \to ۲\hat{C}_۱ > ۲\hat{B}_۱ \to \hat{C} > \hat{B} \to AB > AC$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{BEC} : \text{خارجی}\ \hat{E}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{C} = \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ \\ \overset{\Delta}{BMC} : \text{خارجی}\ \hat{M}_۱ = \hat{C}_۱ + \hat{B} = \hat{C}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{C}_۲ > \hat{B}_۲} \hat{E}_۱ > \hat{M}_۱$$

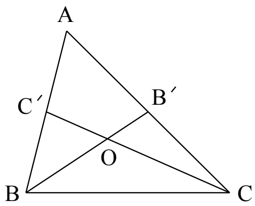
۲ - گزینه ۲

با کمی دقت متوجه می‌شویم که BN و MD برای مثلث CMN حکم ارتفاع را دارند. پس CA نیز بخشی از ارتفاع گذرنده از رأس C است و امتداد آن بر ضلع مقابلش عمود است.



۳ - گزینه ۱ فرض کنیم O مرکز ثقل مثلث باشد، با توجه به اینکه میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند، داریم:

$$OB = \frac{۲}{۳}BB' = \frac{۲}{۳}(۶) = ۴ \quad \text{و} \quad OC = \frac{۲}{۳}CC' = \frac{۲}{۳}(۹) = ۶$$

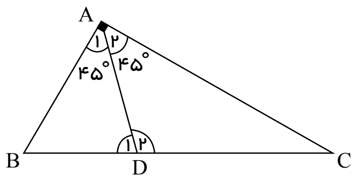


با توجه به این که $OC \not< BC + OB$ نتیجه می گیریم مثلث BOC قابل رسم نیست و در نتیجه مثلث ABC قابل رسم نخواهد بود.

۴ - گزینه ۲

$$\overset{\Delta}{ABD} : AD > AB \to \hat{B} > \hat{D}_۱ \xrightarrow{+\hat{B}} \hat{B} + \hat{B} > \hat{D}_۱ + \hat{B} \to ۲\hat{B} > ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ$$

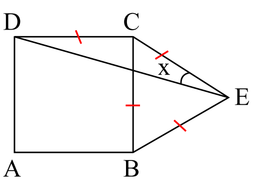
$$\to ۲\hat{B} > ۱۳۵^\circ \to \hat{B} > ۶۷/۵^\circ \ (۱)$$



$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \to \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \to \hat{B} < ۹۰^\circ \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \to ۶۷/۵^\circ < \hat{B} < ۹۰^\circ \to \begin{cases}\beta = ۹۰^\circ \\ \alpha = ۶۷/۵^\circ\end{cases} \to \max(\beta - \alpha) = ۹۰^\circ - ۶۷/۵^\circ = ۲۲/۵^\circ$$

۵ - گزینه ۱



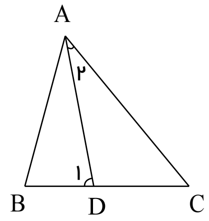
چون $ABCD$ مربع است، همه‌ی زوایای آن ۹۰° است و چون BCE مثلث متساوی‌الاضلاع است، همه‌ی زوایای آن ۶۰° است.

از طرفی $CE = DC$ (ضلع مربع، ضلع متساوی‌الاضلاع هم هست) بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{DCE}$ متساوی‌الساقین است. چون $\hat{C} = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ بنابراین:

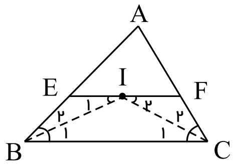
$$x = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

۶ - گزینه ۲ با توجه به شکل داریم:

$$\overset{\triangle}{ADC}:\ \text{زاویهٔ خارجی}\ \hat{D}_۱=\hat{C}+\hat{A}_۲\Rightarrow \hat{D}_۱>\hat{C}\xrightarrow{AB=AD\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۱}\hat{B}>\hat{C}$$



۷ - گزینه ۴ اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. در نتیجه، BI و CI نیم‌ساز هستند.



$$\begin{cases} \text{نیم‌ساز}\ BI\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲\\ \text{نیم‌ساز}\ CI\Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{cases}$$

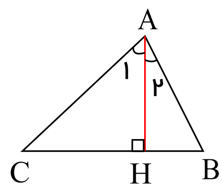
از طرفی باتوجه به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

$$EF\parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\text{مورب}\ BI:\hat{I}_۱=\hat{B}_۱=\hat{B}_۲\\ \text{مورب}\ CI:\hat{I}_۲=\hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\triangle}{EBI}\Rightarrow BE=EI\\ \text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\triangle}{FCI}\Rightarrow CF=FI\end{matrix}\right\}\Rightarrow BE+CF=EI+FI=EF$$

۸ - گزینه ۲ در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}\overset{\triangle}{ABH}:\hat{B}>۴۵^\circ\Rightarrow\hat{A}_۲<۴۵^\circ\Rightarrow AH>BH\\ \overset{\triangle}{ACH}:\hat{C}<۴۵^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱>۴۵^\circ\Rightarrow AH<CH\\ BH<AH<CH\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۴<AH<۶$$

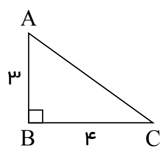


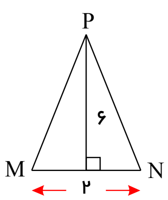
حال کل عبارت را در $\frac{۱}{۲}BC$ ضرب می‌کنیم.

$$۴\times\frac{۱۰}{۲}<\frac{AH\times BC}{۲}<۶\times\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow ۲۰<S<۳۰$$

۹ - گزینه ۳ نکته: در صورتی می‌توان یک قضیه را به‌صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت که عکس آن نیز درست باشد.

عکس قضیه مربوط به گزینه‌ی ۳ درست نیست زیرا اگر دو مثلث هم مساحت باشند لزوماً هم‌نهشت نیستند. مثال نقض



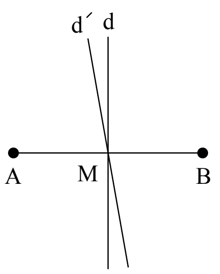


$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{MNP}}=۶$$

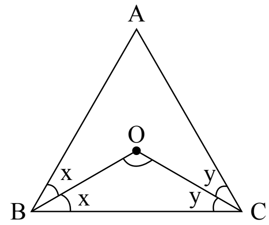
اما: $\overset{\triangle}{ABC}\ncong\overset{\triangle}{MNP}$

۱۰ - گزینه ۴

به روش برهان خلف فرض می‌کنیم دو خط d و d' هر دو عمودمنصف پاره‌خط AB باشند. در این صورت چون d و d' هر دو بر پاره‌خط عمود هستند، پس موازی یکدیگرند. از طرفی هر دو خط d و d' از نقطه‌ی M (وسط پاره خط AB) عبور می‌کند، پس متقاطع‌اند. بنابراین چون دو خط متقاطع نمی‌توانند موازی یکدیگر باشند، پس فرض برهان خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.



۱۱ - گزینه ۳ نقطه O درون مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است بنابراین نقطه همرسی نیمسازهای آن است.



$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A} + ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ \to x + y = ۹۰^\circ - \dfrac{\hat{A}}{۲} \quad (۱)$

$\overset{\triangle}{BOC}: x + y + B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} ۹۰^\circ - \dfrac{\hat{A}}{۲} + B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ \to B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \dfrac{\hat{A}}{۲}$

۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم m_a و m_b و m_c در صورتی می‌توانند میانه‌های مثلث ABC باشند که خود آنها نیز در نامساوی مثلث صدق کنند. (بتوان با میانه‌های مثلث نیز یک مثلث ساخت)
بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m_a < m_b + m_c \Rightarrow ۲m - ۱ < (m+۴) + (۵m+۱) \Rightarrow -۶ < ۴m \Rightarrow \dfrac{-۳}{۲} < m \\ m_b < m_a + m_c \Rightarrow m + ۴ < (۲m-۱) + (۵m+۱) \Rightarrow ۴ < ۶m \Rightarrow \dfrac{۲}{۳} < m \\ m_c < m_a + m_b \Rightarrow ۵m + ۱ < (۲m-۱) + (m+۴) \Rightarrow ۲m < ۲ \Rightarrow m < ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \dfrac{۲}{۳} < m < ۱$$

۱۳ - گزینه ۴ اگر c, b, a طول اضلاع یک مثلث باشند و $k > ۰$، آن‌گاه هم ka, kb, kc طول اضلاع یک مثلث‌اند و هم اعداد $c+k, b+k, a+k$؛ پس گزینه‌های (۱) و (۲) درست هستند.
چون c, b, a طول اضلاع یک مثلث‌اند، پس:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

برای گزینهٔ «۳» داریم:

$a + ۳ < (b+۶) + (c+۹) \Rightarrow a < b + c + ۱۲ (\text{برقرار})$

$b + ۶ < (a+۳) + (c+۹) \Rightarrow b < a + c + ۶ (\text{برقرار})$

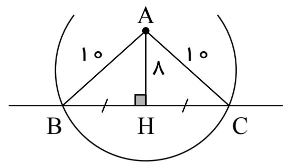
$c + ۹ < (a+۳) + (b+۶) \Rightarrow c < a + b (\text{برقرار})$

پس اعداد گزینهٔ «۳» هم طول اضلاع یک مثلث هستند.
مثال نقض برای گزینهٔ «۴»: به‌ازای $a = ۲, b = ۳, c = ۴$، اعداد گزینهٔ «۴» همواره نمی‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۱۴ - گزینه ۳ گزاره گزینه ۳ دارای ارزش درست است پس ارزش نقیض آن نادرست می‌باشد.

۱۵ - گزینه ۴

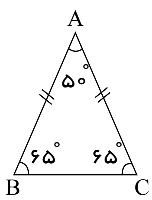
$AB = AC = ۱۰ \to$ روی عمودمنصف BC است A



$\overset{\triangle}{AHB}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \to ۱۰^۲ = ۸^۲ + BH^۲ \to BH = ۶$

شرط تقاطع دو کمان به مراکز B و C و به شعاع R $\to R > \dfrac{BC}{۲} \to R > BH \to R > ۶$

۱۶ - گزینه ۳



روش اول: فرض کنیم مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، بنابراین: $\widehat{A} = ۵۰^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{C} = ۶۵^\circ$ می‌گردد.

ولی باتوجه به فرض $AB > AC$ خواهیم داشت $\widehat{C} > \widehat{B}$ یعنی $\widehat{C} > ۶۵^\circ$ و $\widehat{B} < ۶۵^\circ$ خواهند بود که اولین عدد صحیح کم‌تر از ۶۵° برابر با ۶۴° می‌باشد. پس: $\widehat{B} = ۶۴^\circ$

روش دوم:

در مثلث ABC داریم:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵۰ + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۳۰^\circ$

چون $\widehat{C} > \widehat{B}$ است. بنابراین:

$\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{B} + \widehat{B} \Rightarrow ۱۳۰ > ۲\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} < ۶۵^\circ$

که بزرگ‌ترین مقدار صحیح برای زاویه‌ی B برابر ۶۴° می‌باشد.

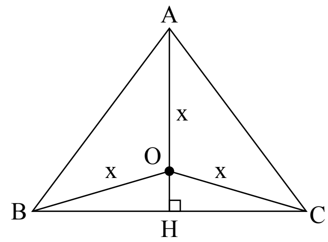
۱۷ - گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} AD = DC \\ AE = CF \\ \text{مشترک}\ \hat{D} = \hat{D} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{DFC} \Rightarrow \begin{cases} F\hat{C}D = D\hat{A}E = ۱۵^\circ \Rightarrow D\hat{F}C = ۷۵^\circ \\ DF = DE \Rightarrow D\hat{F}E = D\hat{E}F = ۴۵^\circ \end{cases}$$

$$C\hat{F}E = D\hat{F}C - D\hat{F}E = ۷۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۰^\circ$$

۱۸ - گزینه ۳ این مثلث متساوی الساقین است و بزرگ‌ترین ضلع آن قاعده آن است، بنابراین محل برخورد عمودمنصف‌ها روی ارتفاع وارد بر قاعده یا امتدادآن است.

از آنجایی‌که در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و نیمساز و میانهٔ وارد بر قاعده منطبق‌اند؛ بنابراین اگر نقطهٔ O محل برخورد عمود منصف‌ها باشد داریم:



$$\overset{\Delta}{AHC} : \begin{cases} \hat{H} = ۹۰^\circ \\ AC = ۵ \\ HC = ۳ \end{cases} \rightarrow HA = ۴$$

محل برخورد عمودمنصف‌ها $O \Rightarrow OA = OB = OC = x$

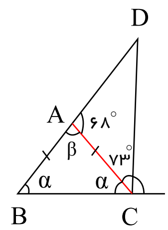
زیرا محل برخورد عمود منصف‌ها از هر سه رأس به یک فاصله است.($OH = ۴ - x$)

$$\overset{\Delta}{OHC} : \begin{cases} \hat{H} = ۹۰^\circ \\ HC = ۳ \\ OH = ۴ - x \\ OC = x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} OC^۲ = OH^۲ + HC^۲ \\ x^۲ = (۴ - x)^۲ + ۳^۲ \\ x^۲ = ۱۶ - ۸x + x^۲ + ۹ \rightarrow x = \frac{۲۵}{۸} \end{array}$$

در نتیجه داریم:

$$OH = ۴ - x = ۴ - \frac{۲۵}{۸} = \frac{۷}{۸} = ۰/۸۷۵$$

۱۹ - گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} : \beta + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \\ \beta = ۳\alpha + ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow (۳\alpha + ۱۰) + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$

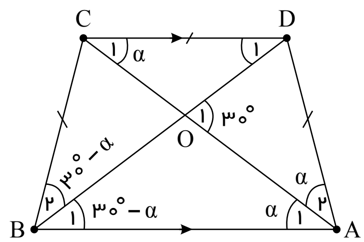
$$\Rightarrow ۵\alpha = ۱۷۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۴^\circ \Rightarrow \beta = ۳(۳۴^\circ) + ۱۰^\circ = ۱۱۲^\circ$$

$$A\hat{C}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۴^\circ}{۲} = ۷۳^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : \hat{D} + ۶۸^\circ + ۷۳^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = ۱۸۰^\circ - ۷۳^\circ - ۶۸^\circ \Rightarrow D = ۳۹^\circ$$

۲۰ - گزینه ۲ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$AB \parallel CD$ و مورب $AC \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ = \alpha$

$DC = DA \rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}_۲ = \alpha$

$\overset{\Delta}{COD}$ خارجی $\hat{O}_۱ = \hat{C}_۱ + \hat{D}_۱ \rightarrow ۳۰^\circ = \alpha + \hat{D}_۱ \rightarrow \hat{D}_۱ = ۳۰^\circ - \alpha$

$CD = CB \rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B}_۲ = ۳۰^\circ - \alpha$

$CD \parallel AB$ و مورب $BD \rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ = ۳۰^\circ - \alpha$

ذوزنقه $ABCD$ متساوی‌الساقین است. $\rightarrow C\hat{B}A = D\hat{A}B \rightarrow ۶۰^\circ - ۲\alpha = ۲\alpha \rightarrow ۶۰^\circ = ۴\alpha \rightarrow \alpha = \frac{۶۰^\circ}{۴} = ۱۵^\circ$

$B\hat{C}D = A\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۱۵^\circ = ۱۵۰^\circ$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴
۲ - ۲
۳ - ۱
۴ - ۲
۵ - ۱
۶ - ۲
۷ - ۴
۸ - ۲
۹ - ۳
۱۰ - ۴
۱۱ - ۳
۱۲ - ۲
۱۳ - ۴
۱۴ - ۳
۱۵ - ۴
۱۶ - ۳
۱۷ - ۳
۱۸ - ۳
۱۹ - ۱
۲۰ - ۲

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه دهم فصل ۲

دبیرستان سپهر دانش

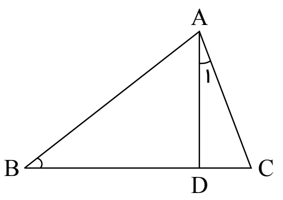
۱ - کدام دو شکل الزاماً متشابه نیستند؟

① هر دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین
② هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند.
③ هر دو شش ضلعی منتظم
④ هر دو مستطیل

۲ - اگر $\frac{3a-2b}{a}=k$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

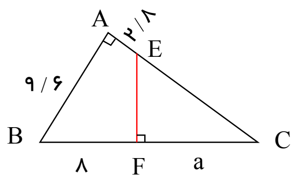
① $\frac{k+1}{5-k}$ ② $\frac{k-1}{5-k}$ ③ $\frac{k-1}{k-5}$ ④ $\frac{k+1}{k-5}$

۳ - در شکل مقابل داریم: $\hat{A}_1=\hat{B}$، $AC=4$ و $BD=6$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ADC است؟



① ۳
② ۹
③ ۴
④ ۱۶

۴ - در شکل مقابل مقدار صحیح a برابر کدام است؟

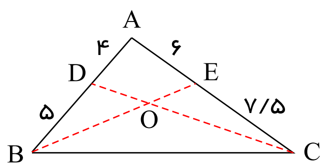


① ۹
② ۱۲
③ ۱۰
④ ۸

۵ - در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ اگر $AC=2AB$، ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۶ - در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



① $\frac{2}{3}$
② $\frac{4}{5}$
③ $\frac{5}{6}$
④ ۱

۷ - در دو چندضلعی با تعداد اضلاع متفاوت، تفاضل تعداد قطرها از دو برابر تعداد اضلاع، یکسان است. اختلاف تعداد رئوس این دو چندضلعی کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

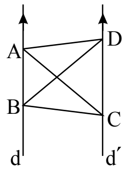
۸ - نقاط M و N و P وسط‌های اضلاع مثلث ABC هستند. اگر محیط مثلث MNP برابر ۶ باشد محیط مثلث ABC کدام است؟

① ۱۲ ② ۹ ③ ۷٫۵ ④ ۱۸

۹ - در ذوزنقه متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۱۲ و ۴، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. وسط‌های اضلاع را متوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

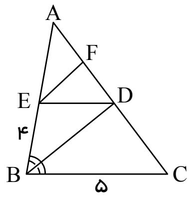
① $4\sqrt{5}$ ② $8\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{10}$ ④ $8\sqrt{10}$

۱۰ - دو خط d و d' با هم موازی‌اند و مساحت مثلث ABC برابر ۱۲$cm^۲$ است. اگر BD برابر ۴cm باشد، در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ A از BD چند سانتی‌متر است؟



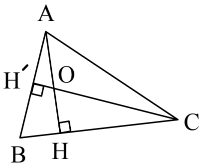
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۱ - در شکل مقابل $DE \| BC$، $EF \| BD$ و BD نیم‌ساز زاویهٔ B است. اگر ۴ $= BE$ و ۵ $= BC$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{DF}{AC}$ کدام است؟



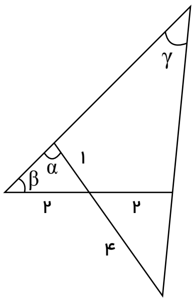
۱) ۰٫۱۸
۲) ۰٫۱۶
۳) ۰٫۲۴
۴) ۰٫۱۲

۱۲ - در شکل زیر اگر ۳ $= OH'$، ۴ $= AH'$ و ۱۱ $= AH$ باشند، آن‌گاه اندازهٔ ضلع AC کدام است؟



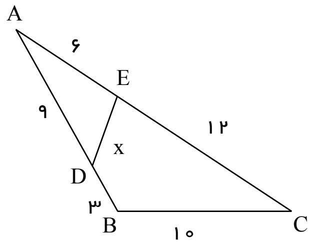
۱) $\sqrt{۱۸۵}$
۲) $\sqrt{۱۴۶}$
۳) ۱۰
۴) $\sqrt{۱۵۷}$

۱۳ - با توجه به شکل زیر، کدام رابطه درست است؟



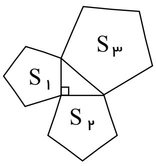
۱) $\gamma = \alpha - \beta$
۲) $\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$
۳) $\alpha + \beta = ۹۰^\circ + \gamma$
۴) $۲\gamma = \alpha + \beta$

۱۴ - در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



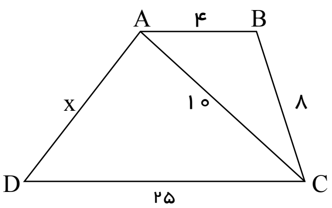
۱) $\frac{۱۰}{۳}$
۲) ۴٫۵
۳) ۵
۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۵ - در شکل زیر سه پنج‌ضلعی منتظم با مساحت‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ روی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده‌ایم. کدام رابطه بین مساحت‌ها برقرار است؟



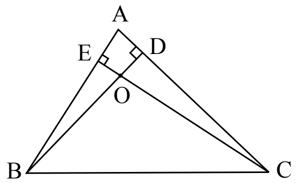
۱) $S_۳^۲ = S_۱^۲ + S_۲^۲$
۲) $S_۳^۲ = S_۱ \times S_۲$
۳) $\sqrt{S_۳} = \sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲}$
۴) $S_۳ = S_۱ + S_۲$

۱۶ - طول ضلع AD در ذوزنقهٔ $ABCD$ کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۱۸
۴) ۱۶

۱۷ - در مثلث زیر، CE و BD به‌ترتیب ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های AB و AC هستند. کدام تشابه لزوماً برقرار نمی‌باشد؟

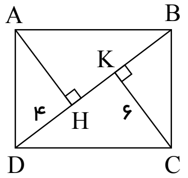


① $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{D}E$
② $A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{C}E$
③ $O\overset{\Delta}{B}E \sim O\overset{\Delta}{D}C$
④ $A\overset{\Delta}{E}D \sim O\overset{\Delta}{B}C$

۱۸ - در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۵}{۲}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث کوچک‌تر چند برابر مساحت مثلث بزرگ‌تر است؟

① ۰٫۱
② ۰٫۱۲
③ ۰٫۱۴
④ ۰٫۱۶

۱۹ - در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است. اگر $DH = ۴$ و $CK = ۶$ باشد، طول HK کدام است؟



① ۴
② ۵
③ ۶
④ ۷

۲۰ - طول کوچک‌ترین ارتفاع یک مثلث برابر ۴ سانتی‌متر و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن برابر ۱۲ سانتی‌متر است. اگر نسبت مساحت مثلث اولی به دومی برابر ۸ باشد، مساحت مثلث دوم چند سانتی‌متر مربع است؟

① $۶\sqrt{۲}$
② ۱۶
③ $۸\sqrt{۲}$
④ ۲۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ هر دو مستطیل دلخواه در حالت کلی متشابه نیستند چون ممکن است اضلاع نظیر متناسب نداشته باشند.

۲ - گزینه ۲

طبق فرض داریم:

$$\frac{۳a-۲b}{a}=k\rightarrow ۳a-۲b=ak\rightarrow ۳a-ak=۲b\rightarrow a(۳-k)=۲b\rightarrow b=\frac{a(۳-k)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{a-\frac{a}{۲}(۳-k)}{a+\frac{a}{۲}(۳-k)}=\frac{۱-\frac{۳-k}{۲}}{۱+\frac{۳-k}{۲}}=\frac{۲-۳+k}{۲+۳-k}=\frac{k-۱}{۵-k}$$

۳ - گزینه ۳

دو مثلث ACD و ABC به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_۱=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{matrix}\right\}\rightarrow A\overset{\triangle}{D}C\sim A\overset{\triangle}{B}C\Rightarrow \frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow \frac{DC}{۴}=\frac{۴}{۶+DC}\Rightarrow DC^۲+۶DC=۱۶\Rightarrow DC^۲+۶DC-۱۶=۰$$

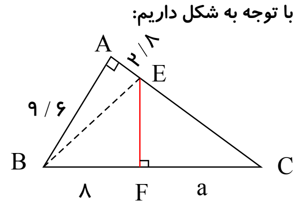
$$\Rightarrow (DC+۸)(DC-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}DC=۲\\ DC=-۸ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر توان دوم نسبت تشابه است. بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}=(\frac{BC}{AC})^۲=(\frac{۸}{۴})^۲=۴$$

۴ - گزینه ۴

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases}\angle F=\angle A=۹۰^\circ\\ \angle C=\angle C\end{cases}\overset{\text{زز}}{\Rightarrow} C\overset{\triangle}{E}F\sim A\overset{\triangle}{B}C\Rightarrow \frac{CF}{AC}=\frac{EF}{AB}=\frac{CE}{BC}(*)$$

از طرفی اگر از E به B وصل کنیم، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BE=\sqrt{(۹/۶)^۲+(۲/۸)^۲}=\sqrt{(۲۴\times ۰/۴)^۲+(۷\times ۰/۴)^۲}=۰/۴\underbrace{\sqrt{۲۴^۲+۷^۲}}_{۲۵^۲}=۰/۴\times ۲۵=۱۰$$

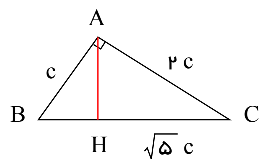
در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEF داریم:

$$EF=\sqrt{BE^۲-BF^۲}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=۶$$

با جایگذاری در تناسب $(*)$ داریم:

$$\frac{۶}{۹/۶}=\frac{\sqrt{a^۲+۳۶}}{۸+a}\xrightarrow{\text{نهایتاً} a\in z} a=۸$$

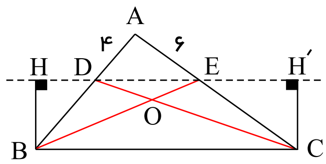
۵ - گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=\sqrt{۵}c$. مطابق شکل داریم:



$$\Delta ABH\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=(\frac{BC}{AB})^۲=(\frac{\sqrt{۵}c}{c})^۲=۵$$

۶ - گزینه ۴

چون $\frac{۴}{۵}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$، پس طبق عکس قضیه‌ی تالس، $DE||BC$. از B و C به ترتیب عمودهای BH و CH' را بر امتدادهای DE وارد می‌کنیم، از آنجا که $DE||BC$، پس $BH=CH'$، بنابراین داریم:



$$\frac{S(B\overset{\triangle}{D}E)}{S(C\overset{\triangle}{D}E)}=\frac{\frac{۱}{۲}BH\times DE}{\frac{۱}{۲}CH'\times DE}=۱\ \Rightarrow\ S(B\overset{\triangle}{D}E)=S(C\overset{\triangle}{D}E)$$

$$\Rightarrow\ S(B\overset{\triangle}{D}E)-S(O\overset{\triangle}{D}E)=S(C\overset{\triangle}{D}E)-S(O\overset{\triangle}{D}E)$$

$$\Rightarrow\ S(O\overset{\triangle}{B}D)=S(O\overset{\triangle}{C}E)\ \Rightarrow\ \frac{S(O\overset{\triangle}{B}D)}{S(O\overset{\triangle}{C}E)}=۱$$

۷ - گزینه ۱ نکته: تعداد قطرها در یک n ضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}$$

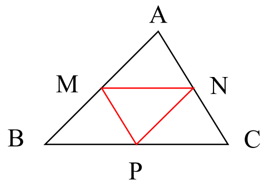
$$۲m-\frac{m(m-۳)}{۲}=۲n-\frac{n(n-۳)}{۲}\xrightarrow{\times(۲)}۴m-m^{۲}+۳m=۴n-n^{۲}+۳n$$

$$\to ۷m-m^{۲}=۷n-n^{۲}\to n^{۲}-m^{۲}=۷n-۷m\to(n-m)(n+m)=۷(n-m)\xrightarrow{m\neq n}n+m=۷$$

چندضلعی حداقل سه ضلع دارد. بنابراین تنها مقادیر ممکن برای تعداد اضلاع $m=۴$ و $n=۳$ می‌باشد و $m-n=۴-۳=۱$ است.

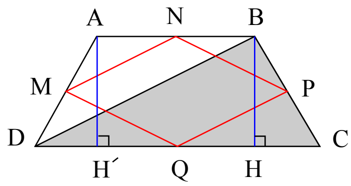
۸ - گزینه ۱ تذکر: اگر اوساط اضلاع ABC را به‌هم وصل کنیم ۴ مثلث همنهشت پدید می‌آید که محیط هریک از آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ محیط مثلث ABC است. درنتیجه:

$$(\text{محیط } M\overset{\triangle}{N}P)=\frac{۱}{۲}(\text{محیط } A\overset{\triangle}{B}C)\Rightarrow \text{محیط } A\overset{\triangle}{B}C=۲\times۶=۱۲$$



۹ - گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AH' , BH را رسم کنیم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت ایجاد می‌شود، داریم:

$$DH'=HC=\frac{۱۲-۴}{۲}=۴$$



با توجه به قضیهٔ تالس می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی $MNPQ$ که وسط‌های اضلاع ذوزنقه را به‌هم وصل کرده، لوزی بوده و اندازهٔ هر ضلع آن نصف قطر ذوزنقه است.

$$A\overset{\triangle}{B}D:\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{DB}=\frac{۱}{۲}$$

پس داریم:

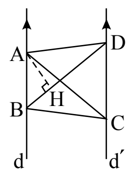
$$B\overset{\triangle}{D}H: BD^{۲}=DH^{۲}+BH^{۲}=۸^{۲}+۴^{۲}=۸۰\to BD=AC=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط}MNPQ=(\text{مجموع اقطار})=(۴\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵})=۸\sqrt{۵}$$

۱۰ - گزینه ۳ دو مثلث ABC و ABD، قاعده‌ی یکسان (AB) و ارتفاع یکسان دارند، بنابراین این دو مثلث مساحت یکسان دارند. پس:

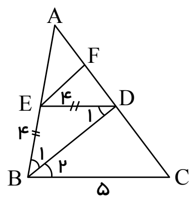
$$S_{A\overset{\triangle}{B}D}=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times AH\times BD=۱۲$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times AH\times۴=۱۲\Rightarrow AH=۶cm$$



۱۱ - گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} ED||BC\xrightarrow{\text{مورّب } BD}\hat{D}_{۱}=\hat{B}_{۲}\\ \text{نیمساز است}\quad BD\to\hat{B}_{۱}=\hat{B}_{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۱}\Rightarrow EB=ED=۴$$



$$A\overset{\triangle}{B}C: ED||BC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{۴}{۵}\quad(۱)$$

$$A\overset{\triangle}{B}D: EF||BD\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{EB}{AB}=\frac{FD}{AD}=\frac{AB-AE}{AB}=\frac{AB}{AB}-\frac{AE}{AB}$$

$$=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}\quad(۲)$$

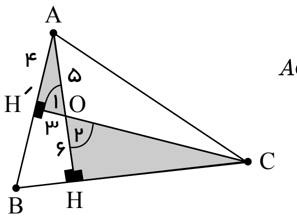
از طرفی داریم:

$$\frac{DF}{AC}=\frac{DF}{AD}\times\frac{AD}{AC}\quad (۳)$$

$$(۱)\,,\,(۲)\,,\,(۳)\Rightarrow \frac{DF}{AC}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۲۵}=۰٫۱۶$$

۱۲ - گزینه ۱

شکل زیر را در نظر بگیرید:

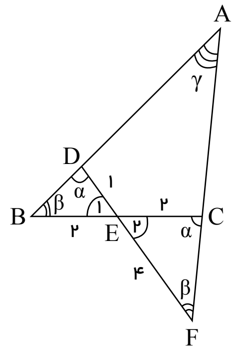


$$\overset{\Delta}{AOH'}\xrightarrow{\text{بنابر قضیه فیثاغورس}} OA=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

$$\overset{\Delta}{AOH'}\sim\overset{\Delta}{COH}(\text{زز})\xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}}\frac{AH'}{HC}=\frac{OH'}{OH}\to\frac{۴}{HC}=\frac{۳}{۶}\to HC=۴\times۲=۸$$

$$=\sqrt{۱۸۵}\,\overset{\Delta}{AHC}\xrightarrow{\text{بنابر قضیه فیثاغورس}} AC=\sqrt{AH^۲+HC^۲}=\sqrt{۱۱^۲+۸^۲}=\sqrt{۱۲۱+۶۴}$$

۱۳ - گزینه ۱ با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \dfrac{BE}{EF}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \hat{E}_۱=\hat{E}_۲\quad(\text{متقابل به رأس})\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض زض}}\overset{\Delta}{BDE}\sim\overset{\Delta}{FEC}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}\hat{F}=\hat{B}=\beta\,,\ \hat{D}=\hat{C}=\alpha$$

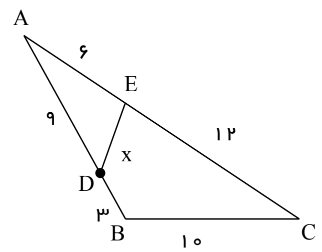
در نتیجه:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\ \text{زاویهٔ خارجی}\ \hat{C}=\hat{A}+\hat{B}\to\alpha=\beta+\gamma\to\gamma=\alpha-\beta$$

۱۴ - گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{۶}{۱۲}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{۹}{۱۸}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}\to\frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\to x=۵$$



۱۵ - گزینه ۴ نکته: تمامی n ضلعی‌های منتظم با یکدیگر متشابهند بنابراین سه ۵ ضلعی منتظم داده شده با یکدیگر متشابه بوده و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها می‌باشد.

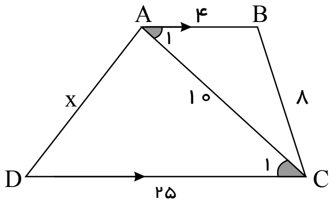
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی داده شده، باتوجه به رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $a^۲=b^۲+c^۲$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_۳}{S_۲}=\dfrac{a^۲}{c^۲}\Rightarrow S_۲=\left(\dfrac{c}{a}\right)^۲\times S_۳\\[2mm] \dfrac{S_۳}{S_۱}=\dfrac{a^۲}{b^۲}\Rightarrow S_۱=\left(\dfrac{b}{a}\right)^۲\times S_۳\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}S_۱+S_۲=S_۳\left(\left(\frac{c}{a}\right)^۲+\left(\frac{b}{a}\right)^۲\right)$$

$$\Rightarrow S_۱+S_۲=S_۳\left(\frac{\overbrace{c^۲+b^۲}^{\cancel{a^۲}\ ۱}}{\underset{۱}{\cancel{a^۲}}}\right)\Rightarrow S_۱+S_۲=S_۳$$

۱۶ - گزینه ۱

با توجه به قضیهٔ خطوط موازی $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ است؛ داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{۴}{۱۰} = \dfrac{۲}{۵} \\ \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{۱۰}{۲۵} = \dfrac{۲}{۵}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{۲}{۵} \\ \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ACD}$$

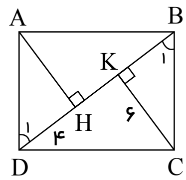
$$\xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{۲}{۵} \rightarrow \dfrac{۸}{x} = \dfrac{۲}{۵} \rightarrow x = ۲۰$$

۱۷ - گزینه ۴ دو مثلث ABD و ACE در حالت دو زاویهٔ برابر متشابه هستند. پس گزینهٔ «۲» درست است؛ در نتیجه $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$، بنابراین $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ و چون زاویهٔ A در دو مثلث ADE و ABC یکسان است، پس این دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر، متشابه هستند و گزینهٔ «۱» نیز درست است. دو مثلث OBE و ODC نیز به حالت دو زاویهٔ برابر متشابه هستند، پس گزینهٔ «۳» نیز درست است.

۱۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت اضلاع متناظر برابر است. بنابراین:

$$\dfrac{S_۲}{S_۱} = (\dfrac{۲}{۵})^۲ = \dfrac{۴}{۲۵} = ۰/۱۶$$

۱۹ - گزینه ۲



$$\left\{\begin{array}{l}\hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \\ AD = BC \\ \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱\end{array}\right. \xrightarrow{\text{(وز)}} \overset{\Delta}{ADH} \cong \overset{\Delta}{BCK} \Rightarrow BK = DH = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : AH^۲ = DH \times BH \Rightarrow ۶^۲ = ۴ \times (x + ۴) \Rightarrow x = ۵$$

۲۰ - گزینه ۱ می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه است، پس:

$$k^۲ = \dfrac{S_۱}{S_۲} = ۸ \Rightarrow k = ۲\sqrt{۲}$$

همچنین می‌دانیم اولاً بلندترین ضلع، متناظر با کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است، ثانیاً نسبت ارتفاع‌های متناظر در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است. پس اگر در مثلث دومی، ارتفاع متناظر با ضلع ۱۲ سانتی‌متری را $h_۲$ بگیریم، این ارتفاع کوچک‌ترین ارتفاع مثلث دوم بوده و داریم:

$$k = \dfrac{h_۱}{h_۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \dfrac{۴}{h_۲} \Rightarrow h_۲ = \dfrac{۴}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

در نتیجه مساحت مثلث دوم برابر می‌شود با:

$$S_۲ = \dfrac{۱}{۲}(۱۲ \times \sqrt{۲}) = ۶\sqrt{۲}cm^۲$$

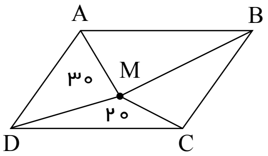
پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۴ - ۴	۷ - ۱	۱۰ - ۳	۱۳ - ۱	۱۶ - ۱	۱۹ - ۲
۲ - ۲	۵ - ۳	۸ - ۱	۱۱ - ۲	۱۴ - ۳	۱۷ - ۴	۲۰ - ۱
۳ - ۳	۶ - ۴	۹ - ۲	۱۲ - ۱	۱۵ - ۴	۱۸ - ۴	

۱ - وسط‌های اضلاع یک لوزی به طول ضلع ۵ را به‌طور متوالی به‌هم وصل کرده‌ایم. محیط چهارضلعی حاصل کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

① ۷ ② ۸ ③ ۹ ④ ۱۱

۲ - در شکل زیر M نقطه‌ای دلخواه درون متوازی الاضلاع است. اگر مساحت $\overset{\Delta}{AMD}$ ۳۰ واحد مربع و مساحت $\overset{\Delta}{DMC}$ ۲۰ واحد مربع باشد، به ترتیب مساحت $\overset{\Delta}{AMB}$ و $\overset{\Delta}{BMC}$ کدام می‌تواند باشد؟



① ۹۰، ۸۰ ② ۹۰، ۷۵

③ ۸۰، ۷۵ ④ ۷۵، ۶۰

۳ - یک مربع شبکه‌ای افقی، مربعی است که رئوس آن نقاط شبکه‌ای و اضلاع آن موازی محور اعداد باشند. اگر به اندازهٔ اضلاع مربعی به طول n، مقدار $n-۱$ واحد اضافه کنیم، تعداد نقاط درونی مربع شبکه‌ای جدید چند برابر تعداد نقاط درونی مربع اولیه است؟

① $\frac{n^{۲}-۱}{n-۲}$ ② $\frac{(۲n-۱)^{۲}}{(n-۱)^{۲}}$ ③ ۴ ④ ۲

۴ - نقطهٔ M، نقطه‌ای دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. هرگاه مجموع فاصله‌های M از دو ضلع این مثلث برابر ۳ واحد و مساحت مثلث برابر $۱۲\sqrt{۳}$ باشد، فاصلهٔ M از ضلع سوم مثلث کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

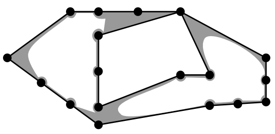
۵ - مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای $\frac{۱۷}{۲}$ واحد است. حداکثر تعداد نقاط درونی این چند ضلعی شبکه‌ای کدام است؟

① ۸ ② ۷ ③ ۱۰ ④ ۹

۶ - در یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، مجموع طول‌های دو قاعده با مجموع طول‌های دو ساق برابر است. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی این ذوزنقه ۶۰° باشد آن‌گاه نسبت طول قاعده‌ی بزرگ به طول قاعده‌ی کوچک آن کدام است؟

① ۳ ② $\sqrt{۳}$ ③ $۲\sqrt{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۷ - اختلاف مساحت دو چندضلعی شبکه‌ای زیر برابر ۱۶٫۵ است. تعداد نقاط درونی چندضلعی بزرگ‌تر، چه‌قدر از تعداد نقاط درونی چندضلعی کوچک‌تر، بیش‌تر است؟



① ۱۱ ② ۱۲ ③ ۱۳ ④ ۱۴

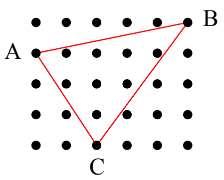
۸ - در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{۳}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{۳}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

① $\frac{۴}{۳}$ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ $\sqrt{۳}$ ④ ۲

۹ - در مثلث ABC، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی ضلع BC قرار گرفته و مجموع فاصله‌های این نقطه از سه رأس مثلث، برابر ۱۵ است. اگر مجموع طول‌های دو ضلع کوچک‌تر این مثلث، ۱٫۲ برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن باشد، مساحت مثلث کدام است؟

① ۹ ② ۱۱ ③ ۱۸ ④ ۲۲

۱۰ – در شکل مقابل، طول ارتفاع نظیر ضلع متوسط مثلث کدام است؟



① $\frac{۱۴}{۱۵}$　② $\frac{۱۷}{\sqrt{۱۳}}$　③ $\frac{۱۷}{\sqrt{۲۰}}$　④ $\frac{۱۷}{۵}$

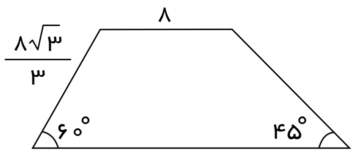
۱۱ – در صفحهٔ مختصات شبکه‌بندی‌شده، چهار نقطه $(۱,۵), (۱,۲), (a,۶), (a+۱,۱)$ رئوس یک چهارضلعی‌اند. اگر مساحت این چهارضلعی ۲۲ باشد، مقدار صحیح a کدام است؟

① ۸　② ۷　③ ۶　④ ۵

۱۲ – در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ یکی از زوایا ۲۵° است. اگر AM و AH به‌ترتیب میانه و ارتفاع وارد بر وتر باشند، زاویهٔ بین آنها کدام است؟

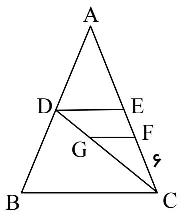
① ۳۰°　② ۳۵°　③ ۴۰°　④ ۴۵°

۱۳ – طول قطر بزرگ‌تر ذوزنقهٔ شکل مقابل کدام است؟



① $۴\sqrt{۵}$　② $۹\sqrt{۲}$　③ $۴\sqrt{۱۰}$　④ $۶\sqrt{۵}$

۱۴ – در شکل زیر $DE||FG||BC$ و CD میانهٔ ضلع AB است. اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، طول AC کدام است؟



① ۱۲　② ۱۵　③ ۱۸　④ ۲۱

۱۵ – کمترین مساحت ممکن برای یک چندضلعی شبکه‌ای که حاصل‌ضرب تعداد نقاط درونی و نقاط مرزی آن ۴۰ باشد، کدام است؟

① ۷٫۵　② ۸　③ ۹٫۵　④ ۱۱

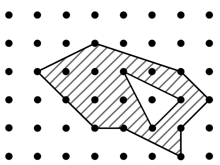
۱۶ – در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قاعده‌ی کوچک با هر ساق برابر و قاعده‌ی بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده این ذوزنقه کدام است؟

① ۳۰°　② ۴۰°　③ ۷۵°　④ ۶۰°

۱۷ – در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، فاصلهٔ نقطهٔ O درون این مثلث از سه ضلع AB، AC و BC به ترتیب ۲، $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ است. مساحت مثلث OAB چقدر است؟

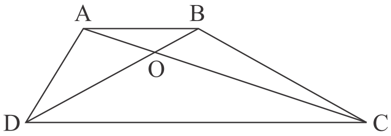
① ۶　② ۴　③ $۶\sqrt{۳}$　④ $۴\sqrt{۳}$

۱۸ – با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده‌شده در شکل زیر کدام است؟



① ۱۰　② ۱۱　③ ۱۰٫۵　④ ۱۱٫۵

۱۹ - چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه‌ای با قاعده‌هایی به طول ۳ و ۶ است. اگر طول قطرهای AC و BD به‌ترتیب ۷ و ۵ و فاصلهٔ نقطهٔ A از قطر BD برابر ۲ باشد، مساحت مثلث OBC کدام است؟



(۱) ۲

(۲) $\frac{۸}{۳}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۲۰ - اگر تعداد قطرهای یک $۲n$ ضلعی محدب، دو برابر مجموع تعداد قطرها و اضلاع یک $(n+۱)$ ضلعی محدب باشد، تعداد قطرهای n ضلعی محدب کدام است؟

(۱) ۲

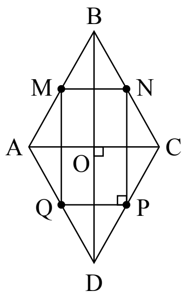
(۲) ۵

(۳) ۹

(۴) ۲۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

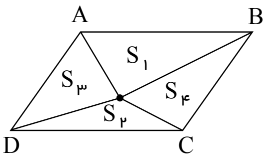


$$MNPQ \text{ محیط مستطیل } = ۲(MN + NP) = ۲(\frac{۱}{۲}BD + \frac{۱}{۲}AC) = AC + BD$$

$$\overset{\triangle}{OAB} \text{ بنابر نامساوی مثلث در } : OA + OB > AB \to ۲OA + ۲OB > ۲AB \xrightarrow{AB=۵} AC + BD > ۱۰$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۱ امکان‌پذیر است.

۲ - گزینه ۱



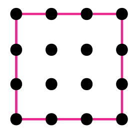
(نکته): با وصل کردن هر نقطهٔ دلخواه درون متوازی الاضلاع، ۴ مثلث پدید می‌آید که مجموع مساحت‌های هر دو مثلث روبه‌رو، برابر نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

با توجه به نکته و فرض سؤال داریم:

$$S_{AMB} + S_{DMC} = S_{AMD} + S_{BMC} \Rightarrow S_{AMB} + ۲۰ = ۳۰ + S_{BMC}$$
$$\Rightarrow S_{AMB} - S_{BMC} = ۱۰$$

تنها در گزینهٔ (۱)، شرط فوق برقرار است.

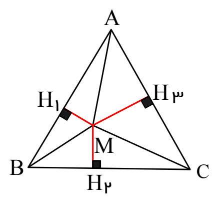
۳ - گزینه ۳ اگر مربع شبکه‌ای به طول ضلع n داشته باشیم، تعداد نقاط درونی آن $(n-۱)^۲$ خواهد بود. حال مربع جدید اضلاعی به طول $n + n - ۱$ واحد دارد، یعنی $۲n - ۱$ واحد و درنتیجه تعداد نقاط درونی آن $(۲n - ۱ - ۱)^۲$ خواهد بود. پس:



$$\frac{(۲n-۲)^۲}{(n-۱)^۲} = ۴$$

درنتیجه تعداد نقاط درونی آن ۴ برابر خواهد بود.

۴ - گزینه ۳



$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۱۲\sqrt{۳} \to a^۲ = ۴۸ \to a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۶$$

مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر طول ارتفاع مثلث است. پس در صورتی که $MH_۱ + MH_۲ = ۳$ باشد، آنگاه داریم:

$$\underbrace{MH_۱ + MH_۲}_{۳} + MH_۳ = ۶ \Rightarrow MH_۲ = ۶ - ۳ = ۳$$

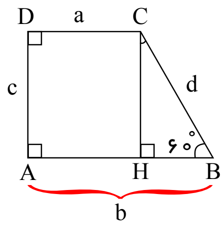
۵ - گزینه ۱

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow \frac{۱۷}{۲} = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow ۱۷ = b + ۲i - ۲ \Rightarrow ۲i = ۱۹ - b$$

بیشترین مقدار i به ازای کمترین مقدار b حاصل می‌شود. می‌دانیم در یک چندضلعی شبکه‌ای $b \geq ۳$ است. پس:

$$۲i = ۱۹ - ۳ \Rightarrow ۲i = ۱۶ \Rightarrow i = ۸$$

۶ - گزینه ۲ بنابر فرض در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی $ABCD$ داریم: $\widehat{B} = ۶۰^\circ$ و $a + b = c + d$. ارتفاع CH را رسم می‌کنیم داریم:



$$CH = c\ ,\quad BH = b - a$$

$$\overset{\triangle}{BCH} : \begin{cases} BH = \dfrac{BC}{۲} \Rightarrow d = ۲(b-a) \\ CH = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}BC \Rightarrow c = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲(b-a) \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{۳}(b-a)$$

$$a+b = c+d \Rightarrow a+b = \sqrt{۳}(b-a) + ۲(b-a) \Rightarrow a+b = \sqrt{۳}b + ۲b - \sqrt{۳}a - ۲a$$

$$\Rightarrow ۳a + a\sqrt{۳} = b + b\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۳+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}+۱} = \sqrt{۳}$$

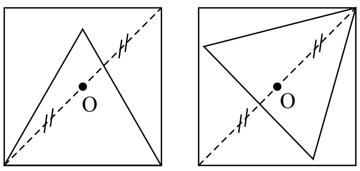
۷ - گزینه ۳ تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بزرگ‌تر را b و i و چندضلعی کوچکتر را b' و i' می‌نامیم. بنا به فرض داریم:

$$S - S' = (i + \frac{b}{۲} - ۱) - (i' + \frac{b'}{۲} - ۱)$$

$$\Rightarrow ۱۶/۵ = i - i' + \frac{۱۳}{۲} - \frac{۶}{۲}$$

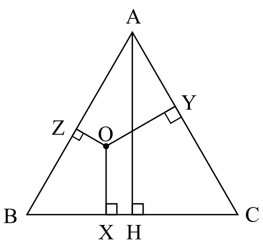
$$\Rightarrow ۱۶/۵ = i - i' + ۳/۵ \Rightarrow i - i' = ۱۳$$

۸ - گزینه ۲



با کمی بررسی، متوجه می‌شویم که مثلث متساوی‌الاضلاع هرطور که رسم شود، مرکز مربع همواره داخل مثلث می‌افتد.

در نتیجه باید مجموع فواصل یک نقطهٔ دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۳}$ را از اضلاع آن به‌دست آوریم.

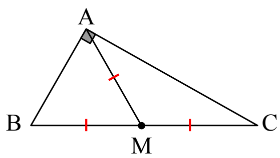


مطابق شکل اگر نقطهٔ O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a = \sqrt{۳}$ باشد، آنگاه داریم:

$$OX + OY + OZ = AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{a=\sqrt{۳}} OX + OY + OZ = \frac{۳}{۲}$$

۹ - گزینه ۲ نقطه همرسی عمودمنصف‌ها روی یکی از اضلاع قرار گرفته است؛ بنابراین مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد و محل همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر می‌باشد.

می‌دانیم نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین داریم:



$$MA + MB + MC = ۱۵ \rightarrow \frac{BC}{۲} + \frac{BC}{۲} + \frac{BC}{۲} = ۱۵ \rightarrow \frac{۳BC}{۲} = ۱۵ \rightarrow BC = ۱۰$$

$$AB + AC = ۱/۲BC \xrightarrow{\text{طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم}} \overbrace{AB^۲ + AC^۲}^{BC^۲} + ۲AB \times AC = ۱/۴۴BC^۲$$

$$۲AB \times AC = ۱/۴۴BC^۲ - BC^۲ = ۰/۴۴BC^۲ \rightarrow AB \times AC = ۰/۲۲BC^۲ = ۰/۲۲ \times ۱۰^۲ = ۲۲$$

$$\rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۲۲ = ۱۱$$

۱۰ - گزینه ۴ ابتدا باید با استفاده از نقاط شبکه‌ای و به کمک رابطه‌ی فیثاغورس طول اضلاع را حساب کنیم تا ضلع متوسط معلوم گردد.

$AB = \sqrt{۵^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲۶}$

$AC = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱۳}$

$BC = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۲۵}$ (ضلع متوسط)

$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times AH (۱)$

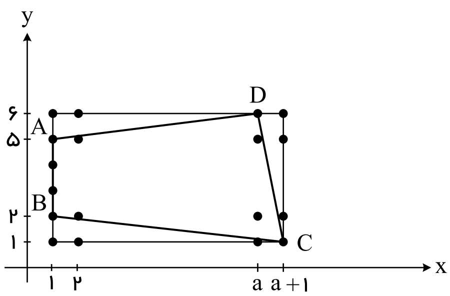
به کمک رابطه‌ی $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ داریم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۳}{۲} + ۸ - ۱ = \frac{۱۷}{۲} (۲)$

$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{۱۷}{۲} = \frac{۵}{۲} \times AH \Rightarrow AH = \frac{۱۷}{۵}$

۱۱ - گزینه ۳ مطابق شکل، چهارضلعی داده‌شده $(ABCD)$ و مستطیل با رئوس $(۱,۱)$،$(۱,۶)$،$(a+۱,۱)$، $(a+۱,۶)$ تعداد نقاط درونی برابری دارند و این تعداد برابر است با:

$[((a+۱)-۱)-۱][(۶-۱)-۱] = ۴(a-۱)$

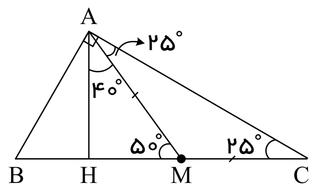
همچنین مطابق شکل، تعداد نقاط مرزی چهارضلعی $ABCD$ برابر ۶ نقطه است؛ پس طبق فرمول پیک داریم:



$S_{ABCD} = ۴(a-۱) + \frac{۶}{۲} - ۱ = ۲۲ \Rightarrow ۴(a-۱) = ۲۰ \Rightarrow a - ۱ = ۵ \Rightarrow a = ۶$

۱۲ - گزینه ۳ روش اول: مطابق شکل فرض می‌کنیم $\hat{C} = ۲۵^\circ$ باشد. از آنجا که AM میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، داریم: $AM = MC$.

در نتیجه مثلث AMC متساوی‌الساقین بوده و داریم:



$C\hat{A}M = \hat{C} = ۲۵^\circ \Rightarrow (\overset{\Delta}{AMC}$ زاویهٔ خارجی$) A\hat{M}H = ۵۰^\circ$

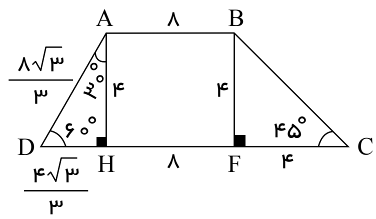
$\xrightarrow{\overset{\Delta}{AHM}} H\hat{A}M = ۴۰^\circ$

روش دوم: در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر، برابر قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حاده است.

$\hat{C} = ۲۵^\circ \rightarrow \hat{B} = ۶۵^\circ \Rightarrow$ زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر $= |\hat{B} - \hat{C}| = ۴۰^\circ$

۱۳ - گزینه ۳ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول وتر است.

در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه $\frac{۱}{۲}$ برابر طول وتر است.



$\overset{\Delta}{ADH}: ۶۰^\circ$ روبه‌رو $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} = ۴$

$\overset{\Delta}{ADH}: ۳۰^\circ$ روبه‌رو $DH = \frac{۱}{۲} AD = \frac{۱}{۲} \times \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

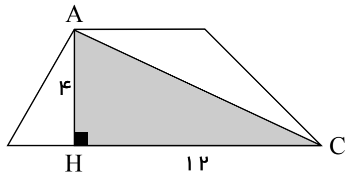
$AB || DC \rightarrow BF = AH = ۴$

$\overset{\Delta}{BFC}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است $\rightarrow FC = BF = ۴$

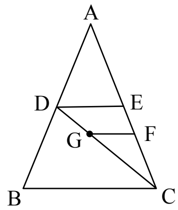
در ادامه طول قطر بزرگتر که AC می‌باشد را محاسبه می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{AHC}$ قضیهٔ فیثاغورس : $AC = \sqrt{AH^۲ + HC^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۱۲^۲}$

$= \sqrt{۱۶ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۶۰} = ۴\sqrt{۱۰}$



۱۴ - گزینه ۳



G مرکز ثقل : $\frac{CG}{GD} = ۲$

تالس : $\frac{CF}{EF} = \frac{CG}{GD}$

$\frac{۶}{EF} = ۲ \to EF = ۳ \to CE = ۹$

تالس : $DE || BC \to \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE} \to ۱ = \frac{AE}{۹} \to AE = ۹$

$AC = AE + EC = ۹ + ۹ = ۱۸$

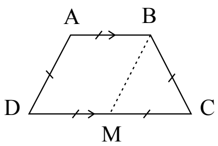
۱۵ - گزینه ۲

$bi = ۴۰ \qquad S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \qquad (b \geq ۳, i \geq o)$

b	۴	۵	۸	۱۰	۲۰	۴۰
i	۱۰	۸	۵	۴	۲	۱
S	۱۱	۹/۵	۸	۸	۱۱	۲۰

$\to S_{min} = ۸$

۱۶ - گزینه ۴

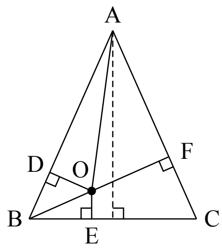


از B به M وسط DC وصل می‌کنیم. در چهارضلعی $ABMD$ چون $AB \overset{||}{=} DM$ ، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، لذا $BM = AD$ ، یعنی مثلث BMC متساوی‌الاضلاع بوده و تمام زوایایش از جمله $\hat{C}$ برابر ۶۰° می‌باشند.

۱۷ - گزینه ۴ می‌دانیم مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه O، درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با طول ارتفاع مثلث، پس داریم:

$h_a = ۲ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} = ۶$

از طرفی : $h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \Rightarrow a = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۳}$



مساحت مثلث OAB برابر است با:

$S = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$

(فاصلهٔ نقطه‌ی O از ضلع AB برابر ۲ می‌باشد.)

۱۸ - گزینه ۲ نکته: مساحت چندضلعی شبکه‌ای از رابطهٔ $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ محاسبه می‌شود که در آن:

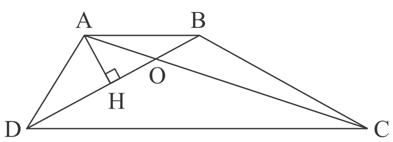
$b =$ نقاط مرزی و $i =$ نقاط درونی

بنابراین خواهیم داشت:

S قسمت هاشورخورده $= S$ شکل بیرونی $- S$ شکل درونی

S قسمت هاشورخورده $= (\frac{۹}{۲} + ۹ - ۱) - (\frac{۳}{۲} + ۱ - ۱) \Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = ۱۲/۵ - ۱/۵ = ۱۱$

۱۹ - گزینه ۴ دو مثلث OAB و ODC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و در نتیجه داریم:



$$\frac{OD}{OB}=\frac{DC}{AB}=\frac{۶}{۳}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{OD}{BD}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow OD=\frac{۲}{۳}BD=\frac{۲}{۳}\times ۵=\frac{۱۰}{۳}$$

می‌دانیم مساحت دو مثلث OAD و OBC برابر است، بنابراین داریم:

$$S_{OBC}=S_{OAD}=\frac{۱}{۲}AH\times OD=\frac{۱}{۲}\times ۲\times\frac{۱۰}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

۲۰ - گزینه ۱

$$\frac{۲n(۲n-۳)}{۲}=۲(n+۱+\frac{(n+۱)(n+۱-۳)}{۲})\rightarrow ۲n^۲-۳n=۲n+۲+n^۲-n-۲\rightarrow n^۲-۴n=۰\rightarrow n=۴$$

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی}=\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۴\times ۱}{۲}=۲$$

پاسخنامه کلیدی

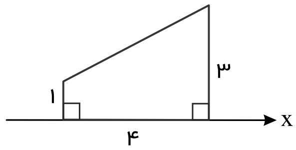
۱ - ۴
۲ - ۱
۳ - ۳
۴ - ۳
۵ - ۱
۶ - ۲
۷ - ۳
۸ - ۲
۹ - ۲
۱۰ - ۴
۱۱ - ۳
۱۲ - ۳
۱۳ - ۳
۱۴ - ۳
۱۵ - ۲
۱۶ - ۴
۱۷ - ۴
۱۸ - ۲
۱۹ - ۴
۲۰ - ۱

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه دهم فصل ۴

دبیرستان سپهر دانش

۱ - در شکل مقابل ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟



① ۱۸π ② $\frac{۵۰\pi}{۳}$

③ $\frac{۵۲\pi}{۳}$ ④ $\frac{۵۳\pi}{۳}$

۲ - یک هرم منتظم ۴ وجهی که طول همهٔ یال‌های آن ۱۰cm است را در نظر می‌گیریم. اگر صفحه‌ای شامل یک یال آن و عمود بر یال متنافر با آن بگذرد مساحت سطح مقطع برابر است با:

① $۵۰\sqrt{۲}$ ② $۵۰\sqrt{۳}$ ③ $۲۵\sqrt{۳}$ ④ $۲۵\sqrt{۲}$

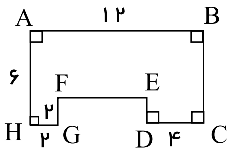
۳ - نیمکره‌ای به قطر ۱۲ واحد، در داخل کوچک‌ترین استوانهٔ ممکن جای گرفته است. حجم محدود به این نیمکره و استوانه، چند برابر π است؟

① ۳۶ ② ۴۲ ③ ۵۴ ④ ۷۲

۴ - مخروط قائمی به شعاع ۵ واحد و حجم ۱۰۰π واحد مکعب مفروض است. اگر صفحه‌ای به فاصلهٔ ۸ واحد تا قاعدهٔ مخروط، بر محور مخروط عمود کنیم، مقدار مساحت این سطح مقطع کدام است؟

① $\frac{۲۵}{۹}\pi$ ② $\frac{۲۵}{۱۶}$ ③ $\frac{۲۵}{۱۲}\pi$ ④ ۳π

۵ - شکل زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم فضای اشغال‌شده کدام است؟



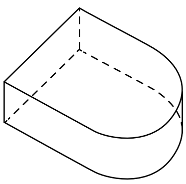
① ۳۱۲π ② ۲۱۶π

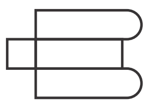
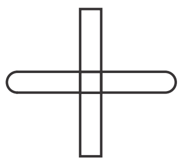
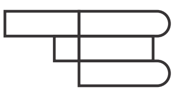
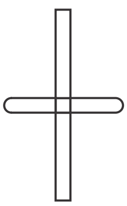
③ ۳۹۶π ④ ۴۳۲π

۶ - مثلث ABC به طول اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۳$ و $BC = ۵$ ، را یک بار حول ضلع BC و یک بار حول ضلع AC دوران می‌دهیم. نسبت حجم جسم اولی به دومی چقدر است؟

① $\frac{۳}{۵}$ ② $\frac{۴}{۵}$ ③ $\frac{۵}{۳}$ ④ $\frac{۵}{۴}$

۷ - اگر شکل مقابل را از لبه‌های آن برش دهیم و روی یک صفحه پهن کنیم، کدام شکل می‌تواند تشکیل شود؟



①

②

③

④


۸ - نقطهٔ A از صفحهٔ P، فاصلهٔ $h > ۰$ دارد. در صفحهٔ P چند خط می‌توان یافت که از نقطهٔ A، فاصلهٔ $h + ۲$ واحد داشته باشد؟

① بی‌شمار ② ۴ ③ ۲ ④ ۱

۹ـ نقطهٔ A خارج از صفحهٔ P و خط d عمود بر صفحهٔ P مفروض هستند. از نقطهٔ A .... خط .... صفحه P و همچنین .... صفحهٔ عمود بر صفحهٔ P و .... خط d می‌توان رسم کرد.

① بی‌شمار ـ عمود بر ـ یک ـ موازی با ② بی‌شمار ـ موازی با ـ یک ـ عمود بر ③ یک ـ عمود بر ـ بی‌شمار ـ موازی با ④ یک ـ موازی با ـ بی‌شمار ـ عمود بر

۱۰ـ مساحت سطح مقطع یک استوانهٔ قائم با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد با مساحت سطح مقطع آن با صفحه‌ای که عمود بر ارتفاع، آن را قطع می کند، برابر است. نسبت مساحت جانبی به مساحت کل استوانه کدام است؟

① $\frac{\pi}{\pi+۱}$ ② $\frac{\pi}{\pi+۲}$ ③ $\frac{\pi}{۴}$ ④ $\frac{۲}{\pi}$

۱۱ـ صفحهٔ P و نقطهٔ A خارج آن مفروض‌اند. چه تعداد از موارد زیر درست است؟

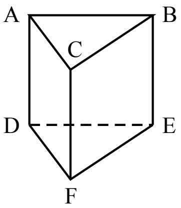
الف) از نقطهٔ A بی‌شمار خط موازی با صفحهٔ P می گذرد.

ب) از نقطهٔ A فقط یک صفحهٔ موازی با صفحهٔ P می گذرد.

پ) کلیهٔ خطوطی که از نقطهٔ A موازی با صفحهٔ P می گذرند، درون یک صفحهٔ موازی با صفحهٔ P قرار دارند.

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۲ـ باتوجه به منشور روبه‌رو، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟



الف) خط AB با خط DF متنافر است.

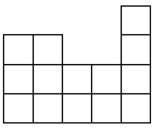
ب) خط BC و خط DF متقاطع‌اند.

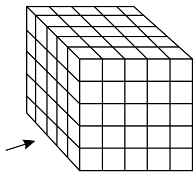
پ) صفحهٔ $ADFC$ با صفحهٔ $ABED$ متقاطع است.

ت) خط DE با خط BC متنافر است.

ث) خط AC با خط DF موازی است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۳ـ در شکل زیر حداقل چند تا و حداکثر چند تا از مکعب‌های کوچک برداشته شود تا نمای بالا به صورت  باشد؟



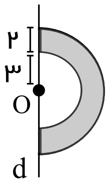
① حداقل ۵۵ ـ حداکثر ۱۱۱ ② حداقل ۶۵ ـ حداکثر ۱۲۰

③ حداقل ۵۰ ـ حداکثر ۱۱۰ ④ حداقل ۶۰ ـ حداکثر ۱۱۲

۱۴ـ دو صفحه‌ی متقاطع $R_۱$ و $R_۲$ بر صفحه‌ی P عمودند و خط d موازی فصل مشترک $R_۱$ و $R_۲$ می‌باشد. وضعیت d نسبت به صفحه‌ی P چگونه است؟

① عمود ② موازی ③ منطبق ④ هر سه حالت ممکن است.

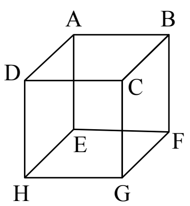
۱۵ـ در شکل زیر قسمت هاشورخورده را حول خط d به اندازهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم. سطح کل جسم حادث چند برابر π است؟



① ۲۹ ② ۳۴

③ ۴۰ ④ ۵۰

۱۶ـ در مکعب روبه‌رو، خط شامل یال AD با چه تعداد از خط‌های گذرنده از یال‌های مکعب متنافر است؟



① ۲ ② ۳

③ ۴ ④ ۵

۱۷ - خط d، صفحهٔ P و نقطهٔ A غیر واقع بر آن‌ها مفروض‌اند. در کدام یک از موارد زیر، بیش از یک خط یا صفحه می‌توان رسم کرد؟

(۱) خطی که از A بگذرد و با d موازی باشد.

(۲) خطی که از A بگذرد و بر صفحهٔ P عمود باشد.

(۳) خطی که از A بگذرد و با صفحهٔ P موازی باشد.

(۴) صفحه‌ای که از d بگذرد و بر P عمود باشد (در حالتی که d بر صفحه‌ی P عمود نیست.)

۱۸ - دو خط d و d' هر دو برخط l عمودند. کدام ویژگی لزوماً در مورد d و d' درست است؟

(۱) با صفحه‌ای موازی l، موازی‌اند. (۲) بر صفحه‌ای موازی l، عمودند. (۳) با صفحه‌ای عمود بر l، موازی‌اند. (۴) بر صفحه‌ای عمود بر l، عمودند.

۱۹ - اگر سه صفحه دوبه‌دو متقاطع باشند، فصل مشترک‌های آن‌ها چگونه است؟

(۱) هر سه حالت امکان‌پذیر است. (۲) موازی (۳) گذرا بر یک نقطه (۴) منطبق

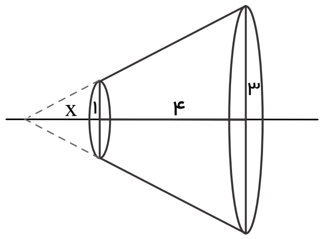
۲۰ - اگر دو صفحهٔ P و P' متقاطع باشند و خط d در صفحهٔ P واقع باشد، آن‌گاه خط d و صفحهٔ P' کدام وضعیت را دارند؟

(۱) d و P' متقاطع‌اند. (۲) d و P' موازی‌اند. (۳) d بر P' واقع است. (۴) هرسه گزینه امکان‌پذیر است.

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول محور x، یک مخروط ناقص به دست می‌آید که حجم آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x=x+۴\Rightarrow x=۲ \quad : \text{قضیهٔ تالس}$$

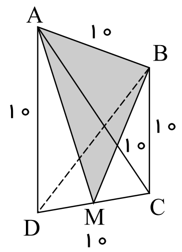
$$\begin{cases} V_{\text{مخروط کامل}}=\frac{۱}{۳}\times\pi\times(۳)^۲\times۶=۱۸\pi \\ V_{\text{مخروط کوچک بالایی}}=\frac{۱}{۳}\times\pi\times(۱)^۲\times۲=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow V_{\text{حجم مطلوب}}=۱۸\pi-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۵۲\pi}{۳}\end{cases}$$

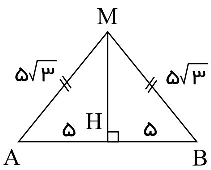
۲ - گزینه ۴ **هر چهار وجه مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین طول AM و BM برابر است:**

$$AM=BM=\frac{\sqrt{۳}}{۲}DC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱۰=۵\sqrt{۳}$$

$$MH^۲+۵^۲=(۵\sqrt{۳})^۲\Rightarrow MH^۲=۷۵-۲۵=۵۰\rightarrow MH=۵\sqrt{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AMB}}\ \text{سطح مقطع}=\frac{۱}{۲}MH\times AB=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۲}\times۱۰=۲۵\sqrt{۲}$$

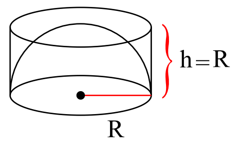




۳ - گزینه ۴ **چون نیمکره درون استوانه قرار دارد پس شعاع قاعدهٔ استوانه برابر شعاع نیمکره و ارتفاع آن برابر شعاع نیمکره است.**

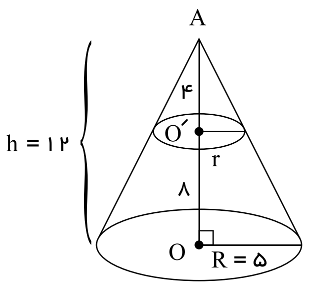
حجم محدود به این نیمکره و استوانه، برابر با تفاضل حجم‌های آنها است. پس داریم:

$$\begin{cases} V_۱=V_{\text{استوانه}}=\pi R^۲h\overset{h=R}{=\!=\!=}\pi R^۳ \\ V_۲=V_{\text{نیمکره}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۲}{۳}\pi R^۳\end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{حجم بین نیمکره و استوانه}=V_۱-V_۲=\pi R^۳-\frac{۲}{۳}\pi R^۳=\frac{۱}{۳}\pi R^۳\overset{R=۶}{=\!=\!=}۷۲\pi$$

۴ - گزینه ۱ **یادآوری: حجم مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعده R برابر است با:**



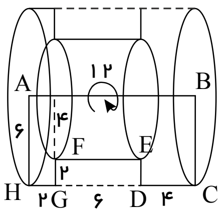
$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲\cdot h$$

$$\xrightarrow{R=۵\ ,\ V=۱۰۰\pi}۱۰۰\pi=\frac{۱}{۳}\pi\times۲۵\times h\Rightarrow h=۱۲$$

از طرفی می‌دانیم هرگاه یک مخروط را با صفحهٔ عمود بر محور آن برش دهیم، سطح مقطع یک دایره می‌شود که مساحت این دایره با استفاده از قضیهٔ تالس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{r}{R}=\frac{AO'}{AO}\Rightarrow\frac{r}{۵}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow r=\frac{۵}{۳}\Rightarrow S=\pi r^{۲}=\frac{۲۵}{۹}\pi$$

۵ - گزینه ۱



روش اول:

شکل حاصل سه استوانه می‌شود (دو استوانه در طرفین و یک استوانه در بین آنها). داریم:

$$V=\pi\times ۶^{۲}\times ۲+\pi\times ۴^{۲}\times ۶+\pi\times ۶^{۲}\times ۴=۳۱۲\pi$$

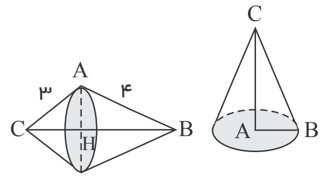
روش دوم:

از حجم استوانه‌ای به شعاع ۶ و ارتفاع ۱۲ یک استوانه به شعاع ۶ و ارتفاع ۶ کم کنیم و سپس یک استوانه به شعاع ۴ و ارتفاع ۶ اضافه کنیم.

$$V=\pi\times ۶^{۲}\times ۱۲-\pi\times ۶^{۲}\times ۶+\pi\times ۴^{۲}\times ۶=۳۱۲\pi$$

۶ - گزینه ۱ وقتی مثلث حول BC دوران پیدا می‌کند شکل فضایی از ۲ مخروط به‌هم‌چسبیده تشکیل می‌شود که حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}\times CH+\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}\times HB=\frac{\pi AH^{۲}}{۳}\times BC$$



از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$S=\frac{۳\times ۴}{۲}=\frac{۵\times AH}{۲}\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

پس:

$$V=\frac{\pi}{۳}\times\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^{۲}\times ۵=\frac{۴۸\pi}{۵}$$

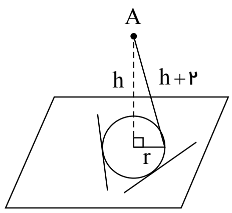
وقتی حول AC دوران می‌دهیم، حجم برابر می‌شود با:

$$V'=\frac{\pi}{۳}(AB)^{۲}\times AC=\frac{\pi}{۳}\times(۴)^{۲}\times ۳=۱۶\pi$$

$$\Rightarrow\frac{V}{V'}=\frac{\frac{۴۸\pi}{۵}}{۱۶\pi}=\frac{۳}{۵}$$

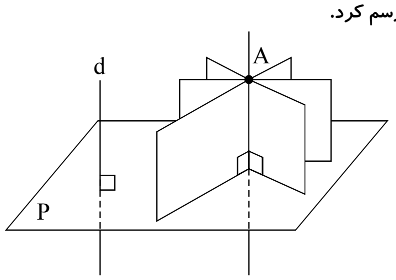
۷ - گزینه ۴ توجه داشته باشیم که ابعاد شکل گزینهٔ «۲» نسبت به نواری که باید کنارهٔ جانبی را تشکیل دهد کوتاه‌تر است و دو انتهای آن به‌هم نمی‌رسند.

۸ - گزینه ۱ طبق شکل مقابل تمام نقاطی که در صفحهٔ P بوده و با نقطهٔ A به فاصلهٔ $h+۲$ واحد باشد روی یک دایره قرار دارد. بنابراین در این صفحه هر خطی که بر دایره مماس باشد فاصله‌اش تا نقطهٔ A برابر $h+۲$ می‌شود. و شعاع این دایره را نیز می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:



$$r^{۲}=(h+۲)^{۲}-h^{۲}=۴h+۴\Rightarrow r=\sqrt{۴h+۴}$$

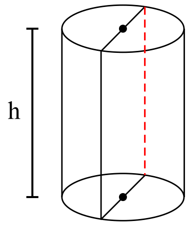
۹ - گزینه ۳ از نقطهٔ A خارج از صفحهٔ P، یک خط عمود بر صفحهٔ P و همچنین بی‌شمار صفحهٔ عمود بر صفحهٔ P و موازی با خط d می‌توان رسم کرد.



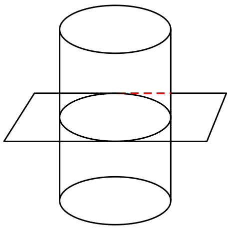
هندسه دهم فصل ۴

۱۰ - گزینه ۲

سطح مقطع حاصل ار برخورد صفحه‌ای که از محور استوانه می‌گذرد مستطیل به ابعاد h و $۲R$ است.



سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای که عمود بر ارتفاع استوانه از آن می‌گذرد دایره‌ای به شعاع R است.



طبق فرض سؤال مساحت دو مقطع دایره‌ای و مستطیلی باهم برابر است بنابراین:

$$۲Rh = \pi R^۲ \to h = \frac{\pi R}{۲}$$

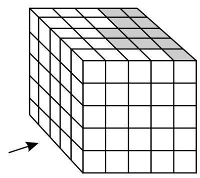
$$\frac{S_{\text{جانبی}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{۲\pi Rh}{۲\pi Rh + ۲\pi R^۲} = \frac{h}{h+R} = \frac{\frac{\pi R}{۲}}{\frac{\pi R}{۲}+R} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}+۱} = \frac{\pi}{\pi+۲}$$

۱۱ - گزینه ۴ هر سه عبارت «الف»، «ب» و «پ» صحیح هستند.

۱۲ - گزینه ۱ فقط مورد «ب» نادرست است. زیرا دو خط BC و DF متنافرند نه متقاطع.

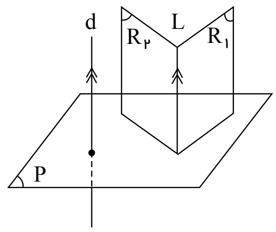
۱۳ - گزینه ۱ برای آن‌که نمای بالای خواسته شده به دست آید باید حداقل تمام مکعب‌های هاشورخورده و مکعب‌های زیر آن برداشته شود یعنی حداقل $۵۵ = ۵ \times ۱۱$. از ردیف مکعب‌های هاشورنخورده حداقل یکی باید بماند پس حداکثر مکعب‌هایی که می‌توان برداشت:

$$۵۵ + ۱۴ \times ۴ = ۵۵ + ۵۶ = ۱۱۱$$



۱۴ - گزینه ۱ قطعاً فصل مشترک دو صفحه $R_۱$ و $R_۲$ (خط L) بر صفحه‌ی P عمود است. بنابراین داریم:

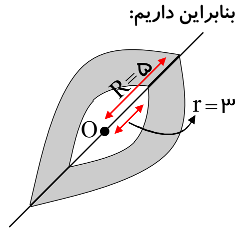
$$\left.\begin{matrix} L \perp P \\ d \parallel L \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp P$$



۱۵ - گزینه ۴ سطح کل جسم حادث از ربع سطح یک کره به شعاع ۵ (رویهٔ خارجی)، ربع سطح یک کره به شعاع ۳ (رویهٔ داخلی) و مساحت دو ناحیهٔ رنگی (سطوح جانبی) تشکیل شده است. بنابراین داریم:

$$S_{\text{کل}} = \frac{۱}{۴}(۴\pi R^۲) + \frac{۱}{۴}(۴\pi r^۲) + ۲(\frac{\pi R^۲}{۲} - \frac{\pi r^۲}{۲})$$

$$S_{\text{کل}} = \pi(۵)^۲ + \pi(۳)^۲ + \pi(۵^۲ - ۳^۲) = ۵۰\pi$$



۱۶ - گزینه ۳ خط شامل یال AD با خط‌های شامل یال‌های EF، HG، CG و BF متنافر است.

۱۷ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک خط موازی آن می‌توان رسم کرد.

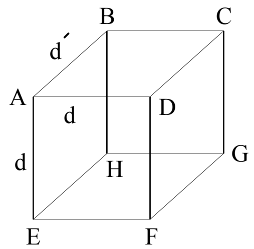
گزینهٔ (۲): از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، یک و تنها یک خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد.

گزینهٔ (۳): از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد.

گزینهٔ (۴): از هر خط غیرواقع بر یک صفحه که بر آن عمود نباشد، یک و تنها یک صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد.

۱۸ - گزینه ۳

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



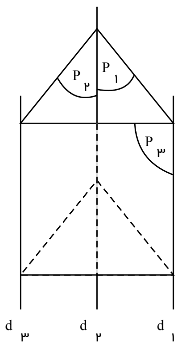
مثال نقض گزینه ۱ : صفحه $CDFG$

مثال نقض گزینه ۲ : صفحه $BCGH$

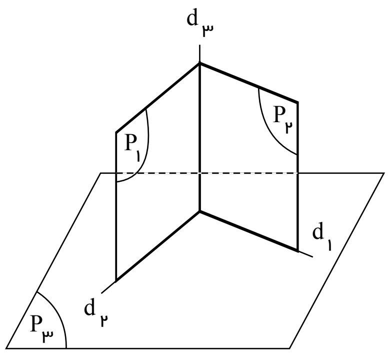
مثال نقض گزینه ۴ : صفحه $EFGH$

۱۹ - گزینه ۱ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

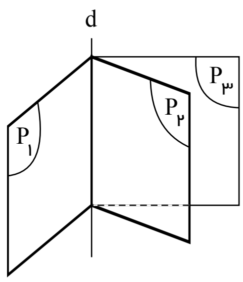
حالت اول: در این حالت فصل مشترک‌ها موازی‌اند



حالت دوم: در این حالت فصل مشترک‌ها گذرا به یک نقطه‌اند.

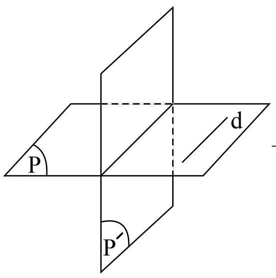


حالت سوم: در این حالت فصل مشترک‌ها منطبقند.

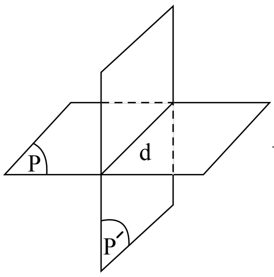


۲۰ - گزینه ۴

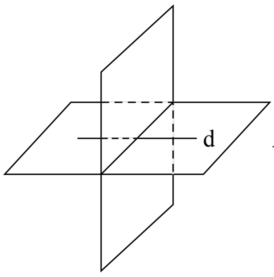
خط d می‌تواند بر صفحهٔ P' واقع گردد یا با آن متقاطع یا موازی باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



$\rightarrow$ d و P' موازی‌اند.



$\rightarrow$ d بر P' واقع است.



$\rightarrow$ d و P' متقاطع‌اند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۴ - ۱	۷ - ۴	۱۰ - ۲	۱۳ - ۱	۱۶ - ۳	۱۹ - ۱
۲ - ۴	۵ - ۱	۸ - ۱	۱۱ - ۴	۱۴ - ۱	۱۷ - ۳	۲۰ - ۴
۳ - ۴	۶ - ۱	۹ - ۳	۱۲ - ۱	۱۵ - ۴	۱۸ - ۳	