



۱) مقدار n کدام باشد تا دو ریشه معادله $x^2 + (5n - 10)x - 25 = 0$ قرینه هم باشند؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۷

۲) کدام یک از گزینه‌های زیر جواب معادله زیر می‌باشد؟

$$8 + x^2 = 3x^2$$

- ۱) فقط ۲ ۲) ۳ ۳) فقط -۲ ۴) ۲ یا -۲

۳) اگر از سه برابر عددی ۵ واحد کم شود، حاصل همان عدد می‌شود. آن عدد کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴) کدام معادله دارای جواب -۶ و ۲ است؟

- ۱) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ۲) $x^2 + 2x - 6 = 0$ ۳) $x^2 + 3x + 8 = 0$ ۴) $x^2 + 8x + 4 = 0$

۵) کدام یک از معادلات زیر درجه اول است؟

- ۱) $\frac{3}{x} + 5 = 0$ ۲) $\frac{3}{x+2} = 0$ ۳) $-4x + 6 = 0$ ۴) $\frac{1}{x} + 5x = 0$

۶) اگر معادله $2x^2 + 4x + (m - 1) = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

- ۱) $m < -3$ ۲) $m < 3$ ۳) $m > 3$ ۴) $m > -3$

۷) به‌ازای چه مقادیری از k ، معادله $3x^2 - 2\sqrt{5}kx - k = 0$ فقط یک جواب حقیقی دارد؟

- ۱) $\{0, \frac{3}{5}\}$ ۲) $\{0, -\frac{3}{5}\}$ ۳) $\{\frac{3}{5}, 1\}$ ۴) $\{-\frac{3}{5}, 1\}$

۸) یکی از جواب‌های معادله درجه دوم $3x^2 + kx - 10 = 0$ برابر ۵ است. جواب دیگر این معادله کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۹) اگر $x = 2$ جواب معادله درجه اول $mx - 1 = \frac{x}{2} + (1 - m)$ باشد، مقدار m کدام است؟

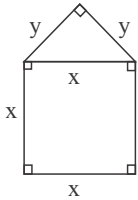
- ۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) صفر

۱۰) به‌ازای کدام مقدار مثبت a معادله $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{ax} = a$ دارای جواب $x = \frac{-1}{2}$ است؟

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴, ۵

۱۱) معادله $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{20}{x^2 - x - 6}$ دارای

- ۱) فقط یک ریشه مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشه منفی دارد. ۳) دو ریشه منفی دارد. ۴) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.



۱۲) اگر مساحت شکل زیر ۲۰ واحد مربع باشد، طول ضلع مربع چه قدر است؟

- ۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۳) در یک پارکینگ عمومی برای هر ساعت، مبلغ ۱۵۰ تومان به اضافه ورودی ثابت ۶۰۰ تومان پرداخت می‌شود. با پرداخت مبلغ ۳۰۰۰ تومان، از این پارکینگ چند ساعت می‌توان استفاده نمود؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۴) مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{1}{x} = \frac{x+1}{2x+6}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۵) در یک مراسم، قبل از شام، یکی را بین مهمان‌ها تقسیم کردند و ۳ نفر از مهمانان مجلس را ترک کردند. اگر بعد از شام، یک کیک به همان اندازه کیک اول را بین مهمان‌ها تقسیم کنیم، به هر نفر به اندازه $\frac{1}{36}$ کل کیک، بیشتر از حالت قبلی می‌رسد. بعد از شام چند نفر در مجلس حضور دارند؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۶) بهراد ۴ سال از خواهرش بزرگ‌تر است. اگر مجموع سن بهراد و خواهرش یک دوم سن پدرشان باشد و سن پدر از سه برابر سن بهراد هشت سال بیشتر باشد، سن بهراد چقدر است؟

- ۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۱۷) تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد از یک کالای مصرفی به صورت $f(x) = \frac{-1}{4}x^2 + 8x$ و تابع هزینه آن به صورت $C(x) = 4x + b$ است. اگر فاصله دو نقطه سر به سر تابع سود این شرکت ۱۲ واحد کالا باشد، مقدار b چقدر است؟

- ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۸) اختلاف سنی پدر و پسری ۱۸ سال است. دو سال دیگر سن پدر ۴ برابر سن پسر می‌شود. مجموع سن پدر و پسر در حال حاضر چقدر است؟

- ۱) ۳۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۱۹) کدام گزینه معادله عبارت «مربع عددی، برابر با عدد ۵ به علاوه ۳ برابر آن عدد است.» می‌باشد؟

- ۱) $x^2 + x = 3x$ ۲) $x^2 - 3x - 5 = 0$ ۳) $-x^2 + 3x - 5 = 0$ ۴) $x^2 + 3x = 5$

۲۰) کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را نصف کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۲۰ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چند هزار تن بوده است؟

- ۱) ۳۲۰ ۲) ۴۶۰ ۳) ۵۸۰ ۴) ۶۲۰

پاسخنامه تشریحی

۱ می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی دو ریشه قرینه‌اند که دو شرط زیر برقرار باشد:

اول: a و c مختلف‌العلامه باشند، دوم: $b = 0$ باشد.

حال در معادله $0 = 25 + (5n - 10)x - 25$ و a, c مختلف‌العلامه هستند، یعنی $(a = 1, c = -25)$ بنابراین باید $b = 0$ باشد.

$$5n - 10 = 0 \Rightarrow 5n = 10 \Rightarrow n = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$8 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$$

راه دوم: $3x^2 = x^2 + 8 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

۳ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم و صورت مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$3x - 5 = x \rightarrow 3x - x = 5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۴ اگر a و b ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه $(x - a)(x - b) = 0$ است. پس داریم:

$$(x + 6)(x - 2) = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

۵ هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است، یک معادله درجه اول می‌نامند.

با توجه به نکته فوق تنها گزینه ۳، $(-4x + 6 = 0)$ معادله درجه ۱ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 + 4x + (m - 1) &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (4)^2 - (4 \times 2 \times (m - 1)) < 0 \rightarrow 16 - 8m + 8 < 0 \rightarrow -8m < -24 \rightarrow m > 3$$

۷ معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ وقتی دارای یک جواب حقیقی مضاعف است که $\Delta = 0$ باشد، پس داریم:

$$3x^2 - 2\sqrt{5k}x - k = 0 \rightarrow a = 3, b = -2\sqrt{5k}, c = -k$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{5k})^2 - 4 \times 3 \times (-k) = 0 \rightarrow 20k^2 + 12k = 0$$

$$\rightarrow 4k(5k + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۸ یکی از جواب‌ها برابر ۵ است. پس $x = 5$ در معادله صدق می‌کند.

$$3(5)^2 + k(5) - 10 = 0 \rightarrow 75 + 5k - 10 = 0 \rightarrow 5k + 65 = 0 \rightarrow 5k = -65 \rightarrow k = -13$$

حال $k = -13$ را در معادله قرار داده و معادله را حل می‌کنیم تا جواب دیگر به دست آید.

$$3x^2 - 13x - 10 = 0 \rightarrow a = 3, b = -13, c = -10$$

$$\rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4(3)(-10) = 169 + 120 = 289$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{289}}{2(3)} = \frac{13 + 17}{6} = \frac{30}{6} = 5 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 - 17}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

۹ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند $x = 2$

$$mx - 1 = \frac{x}{2} + (1 - m) \xrightarrow{x=2} 2m - 1 = \frac{2}{2} + (1 - m) \rightarrow (2m - 1) = -m + 2$$

$$\rightarrow 2m + m = 2 + 1 \rightarrow 3m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{3} = 1$$

۱۰ جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، داریم:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6 \times (-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} - 1} + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{a \times (-\frac{1}{2})} = a \Rightarrow \frac{-3}{-\frac{3}{2}} + \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{a}{2}} = a$$



$$\Rightarrow 2 + \frac{3}{a} = a \Rightarrow a^2 = 2a + 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

پس $a = 3$ یا $a = -1$ است که چون مقدار مثبت a مدنظر است؛ پس $a = 3$ جواب سوال است.

1 2 3 4 11

$$\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{20}{x^2-x-6} \Rightarrow \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{20}{x^2-x-6} = 0$$

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم که مخرج مشترک برابر ک.م.م کل عبارات‌های مخرج کسرها است که در این‌جا برابر است با:

$$\begin{cases} x-3 \\ x+2 \\ x^2-x-6 = (x-3)(x+2) \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ک} = (x-3)(x+2)$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+2)} - \frac{20}{(x-3)(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x-2+x^2-5x+6-20}{(x-3)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-4x-16}{(x-3)(x+2)} = 0$$

حال معادله صورت کسر را حل می‌کنیم:

$$2x^2 - 4x - 16 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 8 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک تجزیه}} (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \text{ ق ق} \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است، زیرا ریشه مخرج معادله گویا می‌باشد که آن را تعریف نشده می‌کند.

مساحت شکل داده شده از مجموع مساحت مربع به ضلع x و مساحت مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه با طول ضلع y به دست می‌آید: 1 2 3 4 12

$$\text{مساحت مربع} = x^2$$

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین} = \frac{y^2}{2}$$

$$\text{مساحت شکل} = x^2 + \frac{y^2}{2} \quad (2) \Rightarrow \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع} = \text{مساحت شکل}$$

$$y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \text{مساحت شکل} = x^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{x^2}{2}\right) = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4}x^2 \xrightarrow{\text{مساحت شکل} = 20} \frac{5}{4}x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 16 \xrightarrow{x > 0} x = 4$$

فرض می‌کنیم x ساعت می‌خواهیم از پارکینگ استفاده کنیم، در نتیجه هزینه پارکینگ با در نظر گرفتن ورودی ثابت از رابطه $150x + 600$ به دست می‌آید. 1 2 3 4 13

حال اگر 3000 تومان پول پارکینگ بدهیم، داریم:

$$150x + 600 = 3000 \Rightarrow 150x = 3000 - 600 \Rightarrow 150x = 2400 \Rightarrow x = \frac{2400}{150} = 16$$

ابتدا ریشه‌های مخرج معادله‌ی گویا را تعیین می‌کنیم. 1 2 3 4 14

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{2x+6}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x+6=0 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

حال معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{2x+6} \Rightarrow x(x+1) = 2x+6 \Rightarrow x^2+x = 2x+6$$

$$\Rightarrow x^2+x-2x-6=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \text{ ق ق} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \text{ ق ق} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول می‌باشند، زیرا ریشه‌ی مخرج نمی‌باشند.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 3 - 2 = 1$$

تعداد اولیه مهمان‌ها را x فرض می‌کنیم، طبق اطلاعات سوال، معادله زیر ساخته می‌شود: 1 2 3 4 15

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36} \xrightarrow{\times 36x(x-3)} 36x - 36(x-3) = x(x-3) \Rightarrow 36x - 36x + 108 = x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 108 = 0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \text{ ق ق} \\ x=-9 \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس بعد از شام 9 نفر در مجلس حضور دارند (چون 3 نفر از 12 نفر مجلس را ترک کرده‌اند).

سن بهراد را x فرض می‌کنیم، پس سن خواهرش $x-4$ سال و سن پدرش $3x+8$ می‌شود. در نتیجه: 1 2 3 4 16

$$x + (x - 4) = \frac{1}{2}(3x + 8)$$

$$2x - 4 = \frac{3}{2}x + 4 \xrightarrow{\times 2} 4x - 8 = 3x + 8$$

$$\Rightarrow 4x - 3x = 8 + 8 \Rightarrow x = 16$$

برای محاسبه تابع سود داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x - (4x + b) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - b$$

در نقطه سربه‌سر در یک تابع سود نقاطی است که تابع سود برابر با صفر شود. یعنی اگر x_1 و x_2 ریشه‌های تابع سود باشد. در این صورت داریم:

$$x_2 - x_1 = 12$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله به کمک روش کلی (دلتا) به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - b \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 4 \\ c = -b \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-\frac{1}{4})(-b)}}{2(-\frac{1}{4})} \Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 - b}}{-\frac{1}{2}}, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 - b}}{-\frac{1}{2}}$$

از طرفی طبق عبارت $x_2 - x_1 = 12$ داریم:

$$x_2 - x_1 = 12 \Rightarrow \frac{-4 - \sqrt{16 - b}}{-\frac{1}{2}} - \frac{-4 + \sqrt{16 - b}}{-\frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow \frac{-4 - \sqrt{16 - b} + 4 - \sqrt{16 - b}}{-\frac{1}{2}} = \frac{12}{1} \Rightarrow -2\sqrt{16 - b} = -6$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - b} = \frac{-6}{-2} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{16 - b})^2 = (3)^2 \Rightarrow 16 - b = 9 \Rightarrow b = 16 - 9 = 7$$

سن پدر: y و سن پسر: x ، معادلات را در یک دستگاه حل می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$\begin{cases} y = x + 18 \\ y + 2 = 4(x + 2) \rightarrow y + 2 = 4x + 8 \rightarrow y = 4x + 6 \\ y = x + 18 \rightarrow x + 18 = 4x + 6 \rightarrow 12 = 3x \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 4 + 18 = 22 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x + y = 22 + 4 = 26$$

عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم ← و به زبان ریاضی اطلاعات مسئله را وارد می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹**

x^2 : مربع عدد

$$3x: 3 \text{ برابر عدد } x \rightarrow x^2 = 3x + 5 \rightarrow x^2 - 3x - 5 = 0$$

+5: بعلاوه پنج

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$\text{شنبه } x \quad \frac{x}{2} \text{ یکشنبه} \quad \frac{1}{2} \frac{(x)}{2} = \frac{x}{4} \text{ دوشنبه} \quad \frac{1}{4} \frac{(x)}{4} = \frac{x}{16} \text{ سه‌شنبه} \quad \frac{1}{8} \frac{(x)}{8} = \frac{x}{64} \text{ چهارشنبه} \quad \frac{1}{16} \frac{(x)}{16} = \frac{x}{256}$$

$$\text{هزارتن } \frac{x}{16} = 20 \Rightarrow x = 320$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = \frac{16x + 8x + 4x + 2x + x}{16} = \frac{31x}{16} = \frac{31 \times 320}{16} = 620$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴



۱- اگر $f(x) = (2-x)|x| + x + \sqrt{2}$ مقدار $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ $1 + \sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

۲- فرض کنید رابطه f به صورت $f = \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد. تعداد عناصر f کدام است؟

- ① ۸ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۲

۳- دو نمودار $y = -3x + 2$ و $y = 2x^2 + x + 2$ در کدام نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

- ① $(2, -8)$ ② $(-2, 8)$ ③ $(2, 8)$ ④ $(-2, -8)$

۴- تابع هزینه و تابع درآمد یک شرکت به ترتیب به صورت $C(x) = 2x + 300$ و $R(x) = -\frac{x^2}{10} + 100x$ می‌باشد، به ازای تولید چه تعداد کالا بیش‌ترین سود نصیب شرکت می‌شود؟

- ① ۴۹۰ ② ۵۰۰ ③ ۵۲۰ ④ ۶۰۰

۵- اگر دو زوج مرتب $(-1, -6)$ و $(-1, 2m + 4)$ با یکدیگر مساوی باشند، در این صورت مقدار m کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ -۵ ④ ۵

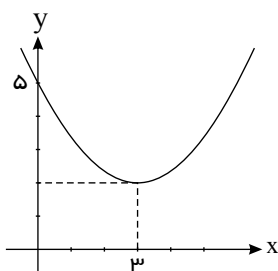
۶- کدام یک از روابط زیر تابع است؟

- ① رابطه‌ای که به هر شهر سوغات آن را نسبت می‌دهد. ② رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستانش را نسبت می‌دهد.
 ③ رابطه‌ای که به هر خودرو قطعات آن را نسبت می‌دهد. ④ رابطه‌ای که هر فرد را به شماره ملی‌اش نسبت می‌دهد.

۷- اگر رابطه $f = \{(1, 4), (-2, a+b), (1, a^2), (-2, 3)\}$ تابع باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

- ① ۶ ② ۵ ③ ۱ ④ -۵

۸- ضابطه نمودار سهمی شکل زیر کدام است؟



① $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$ ② $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 2$

③ $y = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$ ④ $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 3$

۹- اگر تابع $y = (1-m)x^2 + (m^2-6)x + 1$ در نقطه‌ای به طول -۱ دارای ماکسیمم باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۱ ④ ۲

۱۰- معادله محور تقارن منحنی تابع، $2x^2 + y - x - \frac{3}{2} = 0$ ، کدام است؟

- ① $x = -\frac{1}{2}$ ② $x = -\frac{1}{4}$ ③ $x = \frac{1}{4}$ ④ $x = \frac{1}{2}$

۱۱- فرض کنید جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر ۸۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر ۱۰۳۰۰۰۰ نفر بوده است. در این صورت اگر الگوی خطی را برای رشد جمعیت این شهر در نظر بگیریم، در این صورت در سال ۱۴۲۰ جمعیت این شهر کدام است؟

- ① ۱۲۱۰۰۰۰ ② ۱۴۸۰۰۰۰ ③ ۱۵۴۰۰۰۰ ④ ۱۳۰۰۰۰۰

۱۲- اگر $f(x) = \sqrt{x-1} + |6-x|$ باشد، مقدار $f(14 - 4\sqrt{3})$ کدام است؟

- ① صفر ② $2\sqrt{3} - 7$ ③ $7 - 2\sqrt{3}$ ④ $-9 + 6\sqrt{3}$

۱۳- $f(-\frac{5}{2})$ در کدام یک از تابع‌های زیر می‌تواند تعریف شود؟

- ① $f: Z \rightarrow R$ ② $f: N \rightarrow Z$ ③ $f: R \rightarrow W$ ④ $f: Z \rightarrow Z$

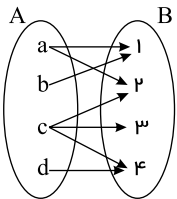
۱۴- اگر ضابطه تابع خطی f ، به صورت $f(x) = (n-1)x^2 + (4m-2)x + k$ باشد و بدانیم $f(1) = 11$ ، $f(2) = 21$ است، مقدار $f(\frac{km}{n})$ کدام است؟

- ① ۲۹ ② ۳۰ ③ ۳۱ ④ ۳۲

۱۵- چند مورد از توصیف‌های زیر، بیانگر تابع هستند؟

- (الف) رابطه‌ای که به هر استان ایران، نام مرکز استان آن را نسبت می‌دهد.
 (ب) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، مقسوم‌علیه‌های زوج آن را نسبت می‌دهد.
 (ج) رابطه‌ای که به هر فرد، تعداد دندان‌های خرابش را نسبت می‌دهد.
 (د) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، جذرش را نسبت می‌دهد.
 (ه) رابطه‌ای که به عدد محیط چهارضلعی، عدد مساحتش را نسبت می‌دهد.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۳



۱۶- حداقل چند پیکان از نمودار ون زیر حذف کنیم، تا رابطه حاصل یک تابع باشد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۷- یک طناب را می‌خواهیم به شکل مستطیل درآوریم. اگر طول طناب ۱۶ متر باشد و در عین حال بیشترین مساحت ممکن باشد، قطر این مستطیل کدام است؟

- ① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $7\sqrt{2}$

۱۸- اگر رابطه $f = \{(3, a^2 + 1), (2a, a + 1), (3, 2a), (2, b)\}$ تابع باشد، مقدار b کدام است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ ۱ ④ -۱

۱۹- محور تقارن سهمی $y = \frac{3}{2}x^2 + x - 4$ کدام است؟

- ① $y = \frac{1}{3}$ ② $x = \frac{1}{3}$ ③ $y = -\frac{1}{3}$ ④ $x = -\frac{1}{3}$

۲۰- اگر بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = mx^2 + 5x - 4$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار $\sqrt{-22m}$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ کافی است در ضابطه‌ی f ، به جای تمام t ها، مقدار $(1 - \sqrt{2})$ را جایگزین کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)|x| + x + \sqrt{2} \\ \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) &= (2 - (1 - \sqrt{2})) \overbrace{|1 - \sqrt{2}|}^{(1 - \sqrt{2})} + (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \\ &= (2 - 1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = \underbrace{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} + 1 = (2 - 1) + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۲ برای به دست آوردن عناصر f کافیست زوج مرتب‌های مجموعه اول و زوج مرتب‌های مجموعه دوم را به صورت مجزا از هم بدست آورد و اجتماع بگیریم.

$$\begin{aligned} \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} &= \{(0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \\ f &= \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \cup \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} = \\ &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} \end{aligned}$$

پس رابطه‌ی f دارای ۹ عضو متمایز است.

۳ - گزینه ۲ برای به دست آوردن نقطه تقاطع دو نمودار کافی است ضابطه‌های آن‌ها را با یکدیگر برابر قرار دهیم:

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x + 2 = -3x + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

حال با قراردادن $x = -2$ و $x = 0$ در یکی از دو معادله مقادیر y متناظر با آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \times (0) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow -3 \times (-2) + 2 = 6 + 2 = 8$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲، درست است.

۴ - گزینه ۱ ابتدا تابع سود شرکت را می‌یابیم:

$$\text{تابع سود} : P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = -\frac{x^2}{10} + 100x - (2x + 300) = -\frac{x^2}{10} + 100x - 2x - 300 = -\frac{x^2}{10} + 98x - 300$$

تابع سود شرکت یک تابع درجه دوم می‌باشد و برای به دست آوردن ماکسیمم سود کافی است مختصات رأس سهمی را بیابیم که در آن طول رأس سهمی تعداد کالای فروخته شده برای بیش‌ترین سود است.

$$P(x) = -\frac{x^2}{10} + 98x - 300 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد } y = ax^2 + bx + c]{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = 98 \\ c = -300 \end{cases}$$

$$\text{طول رأس سهمی} : x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{98}{2(-\frac{1}{10})} = 490$$

پس به‌ازای تولید ۴۹۰ کالا شرکت به حداکثر سود می‌رسد.

دقت کنید که تعداد کالا مطلوب سوال است نه ماکزیمم سود!

۵ - گزینه ۳ دو زوج مرتب زمانی با یکدیگر مساوی‌اند که مؤلفه‌های آن نظیر به نظیر با یکدیگر باشند:

$$(-1, 2m + 4) = (-1, -6) \Rightarrow 2m + 4 = -6$$

$$\Rightarrow 2m = -6 - 4 \Rightarrow 2m = -10 \Rightarrow m = -5$$

۶ - گزینه ۴ به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:



- گزینه ۱: تابع نیست، زیرا هر شهر ممکن است چند سوغاتی داشته باشد، لذا رابطه بین شهر و سوغاتی‌های آنها تابع نمی‌باشد.
 گزینه ۲: تابع نیست، زیرا هر دانش‌آموز ممکن است چندین دوست داشته باشد.
 گزینه ۳: تابع نیست، زیرا هر خودرو از تعداد زیادی قطعه تشکیل شده است و رابطه بین خودرو و قطعاتش تابع نیست.
 گزینه ۴: تابع است، زیرا هر فرد یک شماره ملی منحصر به فرد دارد که مخصوص خودش است، پس این رابطه تابع است.
 ۷ - گزینه ۱ رابطه زوج مرتبی هنگامی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

$$\Rightarrow (1, 4) = (1, a^2) \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$$

$$(I) \xrightarrow{a=2} f = \{(1, 4), (-2, b+2), (1, 4), (-2, 3)\} \Rightarrow (-2, b+2) = (-2, 3)$$

$$\Rightarrow b+2=3 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$(II) \xrightarrow{a=-2} f = \{(1, 4), (-2, b-2), (1, 4), (-2, 3)\} \Rightarrow (-2, b-2) = (-2, 3)$$

$$\Rightarrow b-2=3 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

مجموع مقادیر b عبارت است از: $1 + 5 = 6$

۸ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} y &= a(x-h)^2 + k \\ \left\{ \begin{aligned} h &= 3 \\ k &= 2 \end{aligned} \right. &\rightarrow y = a(x-3)^2 + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5 = a(0-3)^2 + 2 \rightarrow 5 = 9a + 2$$

نقطه برخورد با محور y ها، پس در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$\rightarrow 9a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$$

۹ - گزینه ۴ می‌دانیم که طول رأس سهمی یعنی مقدار x برابر -1 است. بنابراین داریم:

$$y = (1-m)x^2 + (m^2-6)x + 1 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -1 = \frac{m^2+6}{2(1-m)} \Rightarrow -1 = \frac{-m^2+6}{2-2m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2 + 2m = -m^2 + 6 \Rightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 2 \end{cases}$$

می‌کنیم

۱۰ - گزینه ۳ ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم. یعنی:

$$2x^2 + y - x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow y = -2x^2 + x + \frac{3}{2} \xrightarrow{y=ax^2+bx+c} a = -2, b = 1, c = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{محور تقارن } x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-2)} = \frac{1}{4} \quad \text{محور تقارن}$$

۱۱ - گزینه ۲ چون الگوی رشد را خطی در نظر گرفتیم، لذا ابتدا شیب آن را به دست می‌آوریم، با توجه به دو نقطه $A \begin{pmatrix} 1385 \\ 180000 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 1395 \\ 1030000 \end{pmatrix}$ حال داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1030000 - 180000}{1395 - 1385} = \frac{180000}{10} = 18000$$

با توجه به شیب به دست آمده نرخ رشد جمعیت به ازای هر سال 18000 نفر است، لذا بعد از 25 سال افزایش جمعیت برابر است با:

$$\text{افزایش جمعیت بعد از } 25 \text{ سال} = 25 \times 18000 = 450000$$

پس جمعیت در سال 1420 برابر است با:

$$\text{افزایش جمعیت} + \text{جمعیت در سال } 1395 = \text{جمعیت در سال } 1420$$

$$1420 = 1030000 + 450000 = 1480000$$

۱۲ - گزینه ۳

توجه کنید که $\sqrt{u^2} = |u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$ است.

$$\begin{aligned} f(14 - 4\sqrt{3}) &= \sqrt{14 - 4\sqrt{3} - 1} + |6 - 14 + 4\sqrt{3}| \\ &= \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + |-8 + 4\sqrt{3}| = \sqrt{(1 - 2\sqrt{3})^2} + |-8 + 4\sqrt{3}| \\ &= |1 - 2\sqrt{3}| - (-8 + 4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 1 + 8 - 4\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\text{توجه: } (1 - 2\sqrt{3})^2 = 1 + 12 - 4\sqrt{3} = 13 - 4\sqrt{3}$$

۱۳ - گزینه ۳ از آنجا که از بین مجموعه‌های داده شده به عنوان دامنه، $-\frac{5}{2}$ تنها در مجموعه‌ی R قرار دارد. پس می‌توان در تابع f گزینه‌ی ۳، با دامنه‌ی R به سراغ محاسبه $f(-\frac{5}{2})$ رفت.

۱۴ - گزینه ۳ در تابع خطی f ضریب جمله x^2 باید برابر صفر باشد. بنابراین $n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

با توجه به $f(1) = 11$ و $f(2) = 21$ و جایگذاری در ضابطه f داریم:

$$f(1) = 11 \Rightarrow f(1) = (4m - 2)(1) + k = 11 \Rightarrow 4m - 2 + k = 11 \Rightarrow 4m + k = 13$$

$$f(2) = 21 \Rightarrow f(2) = (4m - 2)(2) + k = 21 \Rightarrow 8m - 4 + k = 21 \Rightarrow 8m + k = 25$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول:

$$\begin{aligned} \times (-1) \left\{ \begin{array}{l} 4m + k = 13 \\ 8m + k = 25 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4m - k = -13 \\ 8m + k = 25 \end{array} \right. \\ \hline &\Rightarrow 4m = 12 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

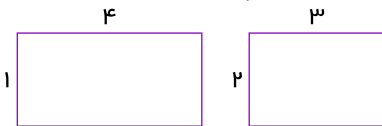
$$4(3) + k = 13 \Rightarrow k = 1$$

$$f(x) = (4m - 2)x + k \Rightarrow f(x) = (4(3) - 2)x + 1 \Rightarrow f(x) = 10x + 1$$

$$\text{مطلوب سوال: } f\left(\frac{km}{n}\right) = f\left(\frac{3 \times 1}{1}\right) = f(3)$$

$$f(3) = 10(3) + 1 \Rightarrow f(3) = 31$$

۱۵ - گزینه ۴ می‌دانیم یک رابطه از A به B وقتی تابع است که به ازای هر ورودی از A فقط یک خروجی از B داشته باشیم. پس روابط (ب) و (ه) تابع نیستند؛ زیرا در رابطه (ب) اگر مثلاً عدد ۱ را انتخاب کنیم، مقسوم‌علیه‌های زوج آن عبارتند از ۲ و ۱۰. در رابطه (ه) هم می‌توان برای محیط ۱۰ دو عدد مساحت ۴ و ۶ را نسبت داد. به شکل‌های زیر توجه کنید.



۱۶ - گزینه ۳

برای اینکه نمودار ون یک رابطه تابع باشد، می‌بایست از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان (فلش) خارج شود. از دو فلشی که از a خارج شده، یک فلش و از سه مثلی که از c خارج شده، ۲ فلش حذف شود.

۱۷ - گزینه ۱ راه اول: مستطیل زمانی ماکسیمم مساحت را دارد که به مربع تبدیل شده باشد، پس:

$$4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \text{قطر} = 4\sqrt{2}$$

راه دوم:

$$2(x + y) = 16 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

$$S = xy = x(8 - x) = 8x - x^2 \Rightarrow x_s = \frac{-8}{2(-1)} = 4 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow S_{max} = 4 \times 4 = 16 \quad \text{قطر} = 4\sqrt{2}$$

۱۸ - گزینه ۱ رابطه زوج مرتبی زمانی تابع است که زوج مرتب‌های دارای مؤلفه‌های اول برابر، مؤلفه دومشان نیز برابر باشد:

$$f = \{(3, a^2 + 1), (2a, a + 1), (3, 2a), (2, b)\}$$

$$(3, a^2 + 1) = (3, 2a) \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

حال با جایگذاری $a = 1$ در رابطه داریم:

$$f = \{(3, 1^2 + 1), (2 \times 1, 1 + 1), (3, 2 \times 1), (2, b)\} = \{(3, 2), (2, 2), (3, 2), (2, b)\}$$

$$(2, 2) = (2, b) \Rightarrow b = 2$$

۱۹ - گزینه ۳ معادله محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ همان طول رأس سهمی است که از رابطه $x_s = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید. حال داریم:

$$y = \frac{3}{2}x^2 + x - 4 \xrightarrow[\text{مقایسه با مفهوم استاندارد } y = ax^2 + bx + c]{\text{مقایسه با مفهوم استاندارد}} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

در نتیجه معادله محور تقارن برابر است با:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = mx^2 + 5x - 4 \Rightarrow a = m, b = 5, c = -4$$

۲۰ - گزینه ۴ بیشترین مقدار برابر عرض نقطه رأس سهمی است:



$$y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{(4 \times m \times (-4)) - 5^2}{4 \times m} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-16m - 25}{4m} = \frac{3}{2} \Rightarrow -32m - 50 = 12m \Rightarrow -32m - 12m = 50$$

$$\Rightarrow -44m = 50 \Rightarrow m = \frac{50}{-44} = -\frac{25}{22}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-22m} = \sqrt{-22\left(-\frac{25}{22}\right)} = 5$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۳

۱۳ - ۳

۱۶ - ۳

۱۹ - ۳

۲ - ۲

۵ - ۳

۸ - ۱

۱۱ - ۲

۱۴ - ۳

۱۷ - ۱

۲۰ - ۴

۳ - ۲

۶ - ۴

۹ - ۴

۱۲ - ۳

۱۵ - ۴

۱۸ - ۱



۱- در یک جامعه آماری، کدام مشخصه عددی درست است؟

- ① پارامتر ثابت و آماره ثابت ② پارامتر ثابت و آماره متغیر ③ پارامتر متغیر و آماره ثابت ④ پارامتر متغیر و آماره متغیر

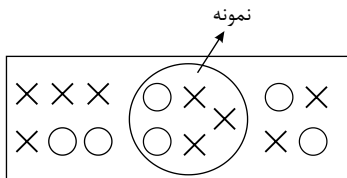
۲- واریانس داده‌های ۵، ۷، ۳، ۶، ۴ چند برابر واریانس داده‌های ۹، ۱۳، ۷، ۱۵، ۱۱ است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$

۳- اگر میانگین داده‌های $1 - 3x_1, 1 - 3x_2, \dots, 1 - 3x_n$ برابر ۱۱ باشد، میانگین داده‌های $5 + \frac{x_1}{4}, 5 + \frac{x_2}{4}, \dots, 5 + \frac{x_n}{4}$ کدام است؟

- ① ۱۲ ② ۱۰ ③ ۴ ④ ۶

۴- در یک کلاس ۱۵ نفره، در درس ریاضی، ۹ نفر نمره ۲۰ و ۶ نفر نمره کمتر از ۲۰ گرفته‌اند. مطابق شکل زیر یک نمونه تصادفی ۵ نفره انتخاب کرده‌ایم. مقدار آماره دانش‌آموزان نمره ۲۰ و پارامتر دانش‌آموزان نمره کمتر از ۲۰ به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (علامت ضربدر دانش‌آموزان نمره ۲۰ و علامت دایره دانش‌آموزان با نمره کمتر از ۲۰ می‌باشند.)



- ① $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

۵- اگر مجموع تفاضل داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{15}$ از عدد ۱۲ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $5 - 2x_1, 5 - 2x_2, 5 - 2x_3, \dots, 5 - 2x_{15}$ کدام است؟

- ① -۱۹ ② -۲۱ ③ ۳۶ ④ -۳۴

۶- میانگین سه عدد برابر ۱۷ است. اگر میانگین دوتای آنها ۲۲ باشد، عدد سوم کدام است؟

- ① ۹ ② ۷ ③ ۸ ④ ۶

۷- اگر میانه داده‌های ۲۰، ۱۷، ۱۶، ۱۷، ۲، ۱۲، ۴، m ، ۶، ۱۰، ۱۳ باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

- ① ۱۱٫۸ ② ۱۱٫۷ ③ ۱۱٫۴ ④ ۱۱٫۹

۸- میانگین ۵ داده برابر ۱۲ است. اگر به داده اول ۲ واحد، به داده دوم ۴ واحد، به داده سوم ۶ واحد، به داده چهارم ۸ واحد و به داده پنجم ۱۰ واحد اضافه کنیم. در این صورت میانگین داده‌های جدید کدام است؟

- ① ۱۲ ② ۱۱ ③ ۱۴ ④ ۱۸

داده‌ها	فراوانی
۷٫۵	۲
۱۲٫۵	۸
۱۷٫۵	x

۹- نمرات ریاضی یک کلاس به صورت مقابل است. اگر میانگین نمره‌ها ۱۴٫۵ باشد، مقدار x کدام است؟

- ① ۹ ② ۱۰ ③ ۱۱ ④ ۱۲

۱۰- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر \bar{x} باشد، میانگین داده‌های $5x_1 + 1, 5x_2 + 3, 5x_3 + 5, \dots, 5x_n + (2n - 1)$ کدام است؟

- ① $5\bar{x}$ ② $5(\bar{x} + 1)$ ③ $5\bar{x} + n$ ④ $5\bar{x} + n + 1$



۱۱- واریانس داده‌های آماری دسته‌بندی شده در جدول مقابل کدام است؟

داده‌ها	۱	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۲	۷	۳	۵	۳

۶٫۴ (۴)

۶٫۲ (۳)

۵٫۶ (۲)

۵٫۴ (۱)

۱۲- کدام شاخص‌های آماری داده‌های ۸ و ۹ و ۵ و ۷ و ۱ با هم برابرند؟

واریانس و دامنه تغییرات (۴)

میانگین و انحراف معیار (۳)

دامنه تغییرات و میانگین (۲)

میانگین و واریانس (۱)

۱۳- اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 برابر ۳ باشد، واریانس داده‌های $2x_1 + 2, 2x_2 + 2, 2x_3 + 2, \dots, 2x_5 + 2$ چقدر است؟

۳۶ (۴)

۲۵ (۳)

۱۸ (۲)

۹ (۱)

۱۴- اگر مد منحصر به فرد داده‌های ۱۴ و ۷ و $a - 3$ و $a - b$ و ۱۱ و ۱۴ برابر ۱۱ باشد، مجموع میانه و میانگین داده‌های b و ۷ و ۶ و a و ۸ کدام است؟

$\frac{37}{5}$ (۴)

$\frac{38}{5}$ (۳)

$\frac{45}{5}$ (۲)

$\frac{73}{5}$ (۱)

۱۵- انحراف از میانگین یک سری از داده‌های آماری برابر ۳، ۲، ۰، ۱، -۴، -۱ است. اگر دو داده ۱۰ و ۱۲ را به داده‌های اصلی، اضافه کنیم، میانگین تغییری نمی‌کند. واریانس هفت داده تقریباً چقدر است؟

۴٫۹ (۴)

۴٫۶ (۳)

۳٫۸ (۲)

۳٫۵ (۱)

۱۶- در یک سری از داده‌های آماری، انحراف داده‌ها از میانگین عبارتند از $-20, -1, 0, m-1, 0, m+1, 0, 1$. مقدار واریانس داده‌ها تقریباً کدام است؟

۱۰۸٫۲ (۴)

۱۰۵٫۶ (۳)

۵۰ (۲)

۴۸ (۱)

۱۷- اختلاف میانه داده‌های ۷، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۲ با میانه داده‌های ۱۰، ۸، ۱۳، ۷ و ۸ کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

۱۸- در داده‌های آماری ۱۰، ۴، ۶، ۸، ۲، دامنه تغییرات با کدام شاخص آماری زیر برابر است؟

میانه (۴)

واریانس (۳)

انحراف معیار (۲)

میانگین (۱)

۱۹- در داده‌های آماری ۲۰، ۱۶، ۱۴، ۷، ۲۰، ۵، ۱۲، ۶، ۷، ۱۰ نسبت فاصله میانه از چارک اول به فاصله آن از چارک سوم کدام است؟

۱٫۴ (۴)

۱٫۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰٫۸ (۱)

۲۰- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{10}, x_{10}, x_{10}, 16, 28$ باشد، میانگین داده‌های ۱۶، ۲۸، x_1, x_2, \dots, x_{10} کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ پارامتر ثابت و آماره متغیر زیرا آماره بسته به نمونه‌های تصادفی مختلف قابل انتخاب، متفاوت است.

۲ - گزینه ۳ میانگین واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

واریانس داده‌های ۴، ۵، ۳، ۷، ۵ برابر است با:

$$\bar{x}_1 = \frac{4 + 6 + 3 + 7 + 5}{5} = 5$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(4-5)^2 + (6-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2}{5} = \frac{1+1+4+4+0}{5} = 2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(11-11)^2 + (15-11)^2 + (7-11)^2 + (13-11)^2 + (9-11)^2}{5} = \frac{0+16+16+4+4}{5} = 8$$

واریانس داده‌های ۱۱، ۱۵، ۷، ۱۳، ۹ برابر است با:

$$\bar{x}_2 = \frac{11 + 15 + 7 + 13 + 9}{5} = 11$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۳ - گزینه ۴ با توجه به فرمول میانگین داریم:

$$11 = \frac{(3x_1 - 1) + (3x_2 - 1) + \dots + (3x_n - 1)}{n}$$

$$\Rightarrow 11n = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow 11n = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$$

$$\Rightarrow 12n = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \Rightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 4n$$

حال میانگین داده‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{x_1}{3} + 5\right) + \left(\frac{x_2}{3} + 5\right) + \dots + \left(\frac{x_n}{3} + 5\right)}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (5 + 5 + \dots + 5)}{n} = \frac{n + 5n}{n} = \frac{6n}{n} = 6$$

۴ - گزینه ۱

آماره مربوط به نمونه آماری است:

$$\frac{3}{5} = \text{آماره دانش‌آموزان نمره ۲۰}$$

پارامتر مربوط به کل جامعه است:

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \text{پارامتر دانش‌آموزان نمره کمتر از ۲۰}$$

۵ - گزینه ۱ می‌دانیم مجموع تفاضل داده‌ها از میانگین، همواره برابر صفر است، پس میانگین x_1, x_2, \dots, x_{15} برابر ۱۲ است. بنابراین با توجه به اینکه داده‌های فوق در (-2) ضرب و سپس با

جمع شده‌اند، میانگین جدید برابر است با:

$$[(-2) \times 12] + 5 = -24 + 5 = -19$$

۶ - گزینه ۲ به کمک رابطه میانگین داریم:

$$17 = \frac{\text{مجموع ۳ عدد}}{3} \Rightarrow \text{مجموع ۳ عدد} = 51$$



$$۲۲ = \frac{\text{مجموع } ۲ \text{ عدد}}{۲} \Rightarrow \text{مجموع } ۲ \text{ عدد} = ۴۴ \Rightarrow \text{عدد سوم} = ۵۱ - ۴۴ = ۷$$

۷ - گزینه ۱

$$۲, ۴, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۲۰$$

ابتدا بدون در نظر گرفتن m ، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

میانه این اعداد (بدون در نظر گرفتن m) برابر ۱۲ است. از آنجا که میانه همه اعداد برابر ۱۳ است، باید عدد m بزرگ‌تر از ۱۲ باشد (زیرا در محاسبه میانه این ۱۰ عدد، میانگین دو عدد وسط محاسبه می‌شود). حال اگر $m \geq ۱۶$ باشد، میانه برابر با $\frac{۱۲+۱۶}{۲} = ۱۴$ می‌شود که نادرست است.

پس m بین ۱۲ و ۱۶ است، یعنی میانه برابر است با: $\frac{m+۱۲}{۲}$

$$\frac{۱۲+m}{۲} = ۱۳ \Rightarrow m = ۱۴$$

حال میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۲+۴+۶+۱۰+۱۲+۱۴+۱۶+۱۷+۱۷+۲۰}{۱۰} = ۱۱,۸$$

۸ - گزینه ۴

$$\text{مجموع داده اول } ۵ \times ۱۲ = ۶۰$$

$$\begin{aligned} \text{میانگین داده‌های جدید} &= \frac{(x_1+۲) + (x_۲+۴) + \dots + (x_۵+۱۰)}{۵} = \frac{\overbrace{(x_1+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵)}^{۶۰} + \overbrace{(۲+۴+\dots+۱۰)}^{۳۰}}{۵} \\ &= \frac{۹۰}{۵} = ۱۸ \end{aligned}$$

۹ - گزینه ۲ با توجه به فرمول میانگین وزنی داریم:

$$\text{فرمول میانگین در جدول} \rightarrow \bar{x} = \frac{(۲ \times ۷,۵) + (۸ \times ۱۲,۵) + (۱۷,۵x)}{۲+۸+x} = ۱۴,۵$$

$$\Rightarrow ۱۵ + ۱۰۰ + ۱۷,۵x = ۱۴,۵(۱۰+x) \Rightarrow ۱۱۵ + ۱۷,۵x = ۱۴۵ + ۱۴,۵x$$

$$\Rightarrow ۳x = ۳۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

۱۰ - گزینه ۳ طبق فرمول میانگین داریم:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_۲ + \dots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_۲ + \dots + x_n = n\bar{x}$$

حال میانگین داده‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}_۲ = \frac{(\delta x_1 + 1) + (\delta x_۲ + ۳) + (\delta x_۳ + ۵) + \dots + (\delta x_n + (۲n-1))}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_۲ = \frac{\overbrace{\delta(x_1 + x_۲ + \dots + x_n)}^{n\bar{x}} + \overbrace{(1+3+5+\dots+(2n-1))}^{n^۲}}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_۲ = \frac{\delta n\bar{x} + n^۲}{n} = \frac{\delta \cancel{n}\bar{x}}{\cancel{n}} + \frac{n^۲}{n} = \delta\bar{x} + n$$

نکته: طبق فرمول میانگین برای داده‌هایی که هر دو عدد متوالی با اختلاف یکسان هستند داریم:

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n} = \frac{1+(2n-1)}{۲} \Rightarrow 1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{۲n^۲}{۲} = n^۲$$

۱۱ - گزینه ۴ ابتدا میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{(1 \times ۲) + (۳ \times ۷) + (۵ \times ۳) + (۷ \times ۵) + (۹ \times ۳)}{۲+۷+۳+۵+۳} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵$$

حال واریانس را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma^۲ &= \frac{۲(1-۵)^۲ + ۷(۳-۵)^۲ + ۳(۵-۵)^۲ + ۵(۷-۵)^۲ + ۳(۹-۵)^۲}{۲۰} \\ &= \frac{۳۲+۲۸+۰+۲۰+۴۸}{۲۰} = \frac{۱۲۸}{۲۰} = ۶,۴ \end{aligned}$$

۱۲ - گزینه ۴

$$۱ و ۵ و ۷ و ۸ و ۹$$

$$R = x_{Max} - x_{Min} = ۹ - ۱ = ۸$$

$$\bar{x} = \frac{۱+۵+۷+۸+۹}{۵} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$



$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(1-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2}{5} = \frac{25 + 1 + 1 + 4 + 9}{5} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین واریانس و دامنه تغییرات با هم برابرند.

۱۳ - گزینه ۴ واریانس، توان دوم انحراف معیار است و اگر عددی به همه‌ی داده‌ها اضافه کنیم تأثیری در انحراف معیار و واریانس ندارد. اما اگر داده‌ها را در عددی ضرب کنیم، انحراف معیار را باید در آن عدد ضرب کنیم.

۱۴ - گزینه ۱ چون مد منحصر به فرد و برابر ۱۱ شده است، پس $a - 3$ و $a - b$ هر دو باید ۱۱ باشند، یعنی:

۱۵ - گزینه ۳ میانگین کل داده‌ها با اضافه شدن ۱۰ و ۱۲ تغییری نمی‌کند، پس میانگین کل، برابر میانگین داده‌های ۱۰ و ۱۲ است، یعنی:

$$a - 3 = 11 \Rightarrow a = 14$$

$$a - b = a - 3 \Rightarrow b = 3$$

پس اعداد عبارتند از 3^3 و 7 و 6 و 14 و 8 که از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{میانگین} = 7 \\ \text{میانگین} = \frac{3 + 6 + 7 + 8 + 14}{5} = \frac{38}{5} \end{array} \right.$$

$$\text{مجموع میانگین و میانگین} = \frac{38}{5} + 7 = \frac{73}{5}$$

پس اختلاف داده‌های ۱۰ و ۱۲ از میانگین (عدد ۱۱) برابر با ۱- و ۱ است، در نتیجه برای محاسبه واریانس داریم:

$$\bar{x} = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2}{7} = \frac{16 + 1 + 4 + 9 + 1 + 1}{7} = \frac{32}{7} \approx 4,6$$

۱۶ - گزینه ۳ ابتدا باید مقدار m را به دست آوریم. می‌دانیم مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است:

$$-1 + 0 + 2m - 1 + 0 + m + 1 - 20 = 0 \Rightarrow 3m = 21 \Rightarrow m = 7$$

انحراف داده‌ها از میانگین

$$\rightarrow -1, 0, 13, 0, 8, -20 \Rightarrow \sigma^2$$

$$= \frac{(-1)^2 + 0^2 + 13^2 + 0^2 + 8^2 + (-20)^2}{6} = \frac{1 + 0 + 169 + 0 + 64 + 400}{6} = \frac{634}{6} \approx 105,6$$

۱۷ - گزینه ۴ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد داده وسطی و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط برابر میانه است. بنابراین:

$$7, 8, 11, 12, 12, 13 \rightarrow \text{داده‌ها زوج} \rightarrow \text{میانه} = \frac{12 + 11}{2} = 11,5$$

$$7, 8, 8, 10, 13 \rightarrow \text{داده‌های فرد} \rightarrow \text{میانه} = 8$$

$$|11,5 - 8| = 3,5$$

۱۸ - گزینه ۳

$$\text{دامنه تغییرات} = 10 - 2 = 8$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}} = \sqrt{\frac{16 + 4 + 0 + 4 + 16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8}$$

دامنه تغییرات و واریانس برابر ۸ می‌باشند. $\sigma^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$ واریانس

میانه در تعداد داده‌های فرد و مرتب شده عدد وسط است: $\text{میانه} = 6$

۱۹ - گزینه ۱ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5, 6, 7, 7, 10, 12, 14, 16, 20, 20$$

با توجه به زوج بودن تعداد داده‌ها، میانه برابر میانگین دو داده وسط است:

$$\text{میانه} = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

چارک اول میانه اعداد قبل از ۱۱ است، بنابراین برابر ۷ خواهد بود. چارک سوم میانه اعداد بعد از ۱۱ است. پس ۱۶ خواهد بود.

$$\left| \begin{array}{l} \text{چارک اول - میانه} \\ \text{چارک سوم - میانه} \end{array} \right| = \frac{11 - 7}{16 - 11} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۲۰ - گزینه ۲

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع داده ها: } x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10 \times 16 = 160 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + 16 + 28 = 160 + 44 = 204$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{204}{12} = 17$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۳

۱۳ - ۴

۱۶ - ۳

۱۹ - ۱

۲ - ۳

۵ - ۱

۸ - ۴

۱۱ - ۴

۱۴ - ۱

۱۷ - ۴

۲۰ - ۲

۳ - ۴

۶ - ۲

۹ - ۲

۱۲ - ۴

۱۵ - ۳

۱۸ - ۳

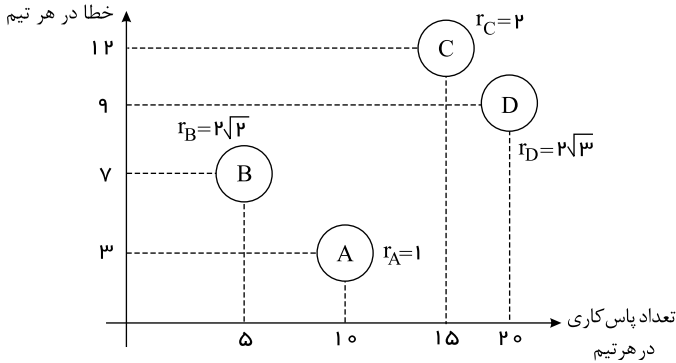


۱- نمودار دایره‌ای برای کدام متغیر مناسب‌تر است و اندازه زاویه مرکزی هر قسمت، متناسب با کدام است؟

- ① کیفی - فراوانی نسبی ② کیفی - شعاع دایره ③ کمی - فراوانی نسبی ④ کمی - شعاع دایره

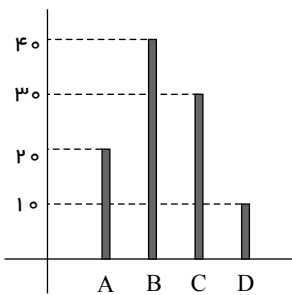
۲- در نمودار حبابی زیر، متغیر سوم تعداد گل‌های هر تیم در نیمه نهایی لیگ قهرمانان آسیا است. تعداد گل‌های تیم B چند برابر تعداد گل‌های تیم C است؟

مجموع تعداد



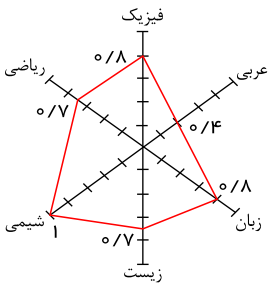
- ① ۴
② $\sqrt{2}$
③ ۲
④ $\frac{4}{3}$

۳- نمودار میله‌ای زیر، درصد تعداد عضوهای متغیر کیفی اسمی است. در نمودار دایره‌ای آن، زاویه مربوط به گروه B، چند درجه است؟



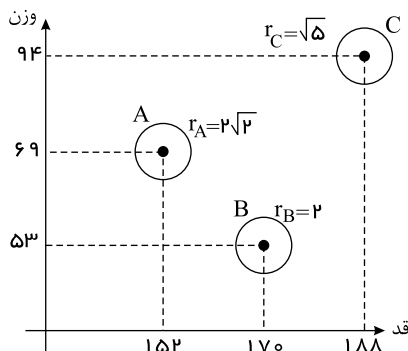
- ① ۱۳۲
② ۱۴۴
③ ۱۵۰
④ ۱۵۶

۴- با توجه به نمودار راداری زیر که برای نمرات ۶ درس علی رسم شده است، میانگین نمرات علی تقریباً کدام است؟ (بالاترین نمره در هر درس ۲۰ است.)



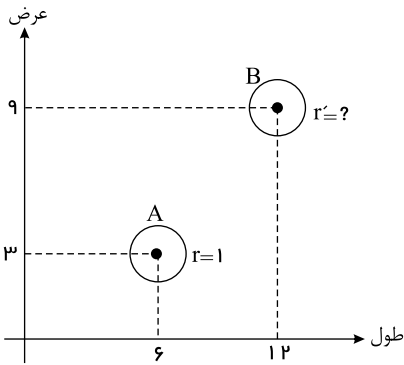
- ① ۱۷,۳
② ۱۴,۶۷
③ ۱۵,۶
④ ۱۸,۷۶

۵- در نمودار حبابی زیر، متغیر سوم نمره درس ریاضی افراد است. اگر بیشترین نمره در بین این افراد ۱۸ باشد، میانگین نمرات این افراد کدام است؟



- ① ۱۲,۷۵
② ۱۶,۷۵
③ ۱۲
④ ۱۸

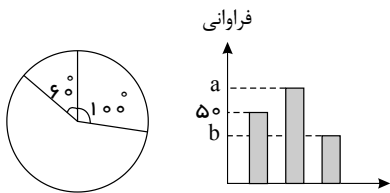
۶- نمودار حبابی زیر را در نظر بگیرید، محور x ها، محور y ها و مساحت دایره‌ها به ترتیب متناظر با طول، عرض و ارتفاع جعبه‌هایی به شکل مکعب‌مستطیل است. شعاع حباب B چند باشد تا حجم جعبه B ، ۳ برابر حجم جعبه A باشد؟



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② ۲
- ③ $3\sqrt{2}$
- ④ $2\sqrt{2}$

۷- احمد فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۳ کشور را تهیه کرده است و می‌خواهد این سه متغیر را با هم برای آن‌ها مقایسه کند. کدام نمودار زیر برای این کنار مناسب است؟

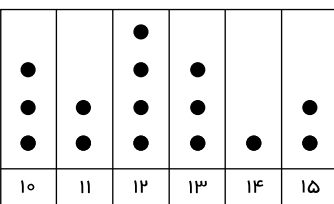
- ① نمودار حبابی
- ② نمودار راداری
- ③ نمودار دایره‌ای
- ④ گزینه‌ی ۱ و ۲



۸- اگر دو نمودار زیر مربوط به نمایش یک مجموعه داده‌ی آماری باشند، $a - b$ کدام است؟

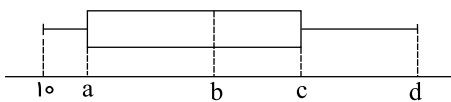
- ① ۱۰۰
- ② ۷۰
- ③ ۵۰
- ④ ۳۰

۹- با توجه به نمودار نقطه‌ای مقابل، اختلاف میانگین و مد کدام است؟

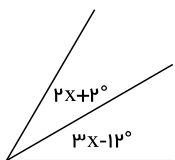


- ① ۰٫۳
- ② ۰٫۲
- ③ صفر
- ④ ۰٫۱

۱۰- در نمودار جعبه‌ای زیر، دامنه میان‌چارکی برابر ۸ و دامنه تغییرات برابر ۱۸ است، اگر تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها کوچک‌تر از ۲۰ باشند، حاصل $\frac{d-c}{a}$ کدام است؟



- ① $\frac{2}{3}$
- ② ۴
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{4}{3}$



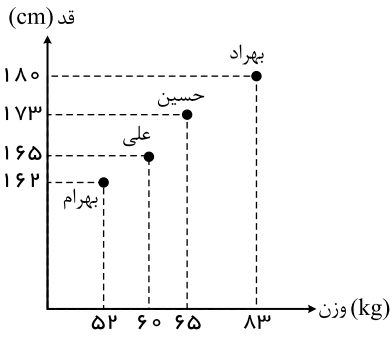
۱۱- اگر قسمتی از یک نمودار راداری به صورت زیر باشد، این نمودار چند متغیر را نشان می‌دهد؟

- ① ۱۰
- ② ۸
- ③ ۱۲
- ④ ۱۴

۱۲- برای داده‌های مقابل، نمودار جعبه‌ای رسم می‌کنیم، میانگین داده‌های بیرون جعبه کدام است؟

۱، ۳، ۳، ۴، ۸، ۱۰، ۱۲، ۴، ۴، ۱، ۱۸، ۲۰، ۲۴، ۲۰

- ① ۱۱٫۵
- ② ۱۲٫۵
- ③ ۱۲٫۸
- ④ ۱۳٫۲



۱۳- با توجه به نمودار پراکنش نگاشت روبه‌رو، به ترتیب میانگین قد افراد و میانگین وزن آنها چقدر است؟

- ۱) $۱۷۰\text{cm} - ۶۵\text{kg}$
- ۲) $۱۷۲\text{cm} - ۶۶\text{kg}$
- ۳) $۱۷۲\text{cm} - ۶۵\text{kg}$
- ۴) $۱۷۰\text{cm} - ۶۶\text{kg}$

۱۴- با توجه به نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر، واریانس داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

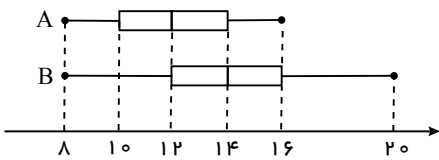
۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۳

- ۱) ۶
- ۲) ۵
- ۳) $\sqrt{۶}$
- ۴) $\sqrt{۵}$

۱۵- اگر داده‌های زیر را داشته باشیم، زاویهٔ مربوط به داده‌های بین چارک اول و چارک سوم (که شامل خود چارک اول و چارک سوم باشد)، در نمودار دایره‌ای تقریباً چند درجه است؟

۲, ۹, ۶, ۴, ۲, ۱۴, ۱۲, ۱۹, ۱۹, ۱۱, ۱۲, ۱۸, ۱۶, ۱۷

- ۱) $۲۰۹,۸^\circ$
- ۲) $۲۰۵,۷^\circ$
- ۳) $۱۰۰,۹^\circ$
- ۴) $۲۰۱,۵^\circ$



۱۶- نمودار زیر مربوط به نمرات دو دانش‌آموز است. با توجه به نمودار کدام گزینه همواره صحیح است؟

- ۱) حداقل نیمی از نمرات دانش‌آموز A از نمرات دانش‌آموز B کمتر است.
- ۲) تقریباً ۲۵٪ نمرات دانش‌آموز B از همهٔ نمرات دانش‌آموز A بیشتر است.
- ۳) حداقل ۵۰٪ نمرات دانش‌آموز A بیشتر از ۱۴ است.
- ۴) دقیقاً ۵۰٪ نمرات دانش‌آموز A بین ۸ و ۱۴ است.

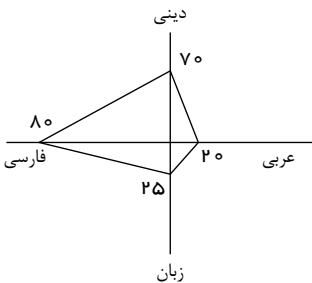
۱۷- اگر تعداد ۳ متغیر به متغیرهای یک نمودار راداری اضافه کنیم زاویهٔ بین شعاع‌ها $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود، زاویهٔ بین متغیرها در حالت اول چند درجه است؟

- ۱) ۳۰
- ۲) ۶۰
- ۳) ۹۰
- ۴) ۱۲۰

۱۸- کدام گزینه نمودار جعبه‌ای داده‌های $\{۱, ۴, ۹, ۷, ۱۱, ۲۱, ۱۸, ۲۰, ۸\}$ می‌باشد؟



۱۹- اگر نمودار راداری زیر مربوط به نمرات دروس عربی، زبان، فارسی و دینی یک دانش‌آموز باشد و ضریب این دروس به ترتیب از راست به چپ ۳، ۴، ۲، ۱ باشد، معدل نمرات این دانش‌آموز کدام است؟ (بیشینه در تمام درس‌ها ۲۰ است.)



- ۱) ۱۲
- ۲) ۶
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است و اندازه زاویه مرکزی هر قسمت متناسب با فراوانی نسبی آن است زیرا $\alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ$ است. که به کسر $\frac{f}{N}$ فراوانی نسبی می‌گوییم.

۲ - گزینه ۳ متغیر سوم متناسب با مساحت دایره است. در نتیجه مساحت دایره‌ها متناسب با تعداد گل‌های زده است.

$$\frac{\text{تعداد گل‌های زده تیم B}}{\text{تعداد گل‌های زده تیم C}} = \frac{\pi \times (2\sqrt{2})^2}{\pi \times (2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

۳ - گزینه ۲

با توجه به نمودار و تناسب زیر داریم:

$$\frac{40}{100} \mid x \rightarrow x = \frac{40 \times 360}{100} = 144 \text{ (درجه)}$$

۴ - گزینه ۲ چون بالاترین نمره در هر درس ۲۰ است، لذا با توجه به بیشینه نمره هر درس مقدار نمره هر درس را با توجه به مقادیر روی شعاع‌ها می‌یابیم:

$$\text{نمره فیزیک} = 0.8 \times 20 = 16$$

$$\text{نمره ریاضی} = 0.7 \times 20 = 14$$

$$\text{نمره شیمی} = 1 \times 20 = 20$$

$$\text{نمره زیست} = 0.7 \times 20 = 14$$

$$\text{نمره زبان} = 0.8 \times 20 = 16$$

$$\text{نمره عربی} = 0.4 \times 20 = 8$$

$$\bar{x} = \frac{16 + 14 + 20 + 14 + 16 + 8}{6} = \frac{88}{6} \approx 14.67$$

میانگین نمرات

۵ - گزینه ۱ متغیر سوم متناسب با مساحت دایره‌ها است که در بین افراد، فرد A دارای بیشترین نمره است، زیرا مساحت دایره مربوط به آن بیشتر است. بنابراین نمره این فرد ۱۸ است. اکنون برای محاسبه نمره فرد B و C داریم:

$$\frac{\text{مساحت دایره A}}{\text{مساحت دایره B}} = \frac{\text{نمره فرد A}}{\text{نمره فرد B}} \Rightarrow \frac{18}{B} = \frac{\pi \times (2\sqrt{2})^2}{\pi \times (2)^2} \Rightarrow \text{نمره فرد B} = \frac{18 \times 4}{8} = 9$$

$$\frac{\text{مساحت دایره A}}{\text{مساحت دایره C}} = \frac{\text{نمره فرد A}}{\text{نمره فرد C}} \Rightarrow \frac{18}{C} = \frac{\pi \times (2\sqrt{2})^2}{\pi \times (\sqrt{5})^2} \Rightarrow \text{نمره فرد C} = \frac{18 \times 5}{8} = 11.25$$

$$\text{میانگین نمرات} = \frac{\text{مجموع نمرات}}{\text{مجموع نمرات}} = \frac{18 + 9 + 11.25}{3} = \frac{38.25}{3} = 12.75$$

۶ - گزینه ۱ از آنجایی که ارتفاع جعبه‌ها متناسب با مساحت دایره‌ها است، بنابراین نسبت حجم جعبه‌ها برابر است با:

$$\frac{\text{حجم جعبه B}}{\text{حجم جعبه A}} = 3 = \frac{12 \times 9 \times \pi \times (r')^2}{6 \times 3 \times \pi \times (1)^2} \Rightarrow 3 = \frac{108(r')^2}{18} \Rightarrow (r')^2 = \frac{18 \times 3}{108} = \frac{1}{2} \Rightarrow r' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷ - گزینه ۴ دو نمودار گزینه‌های ۱، ۲ برای توابع چند متغیره مناسب هستند، اما نمودار دایره‌ای برای مقایسه یک متغیر مناسب است. در صورتی که در سؤال مقایسه سه متغیر را می‌خواهد هم‌زمان انجام دهد. پس نمودار دایره‌ای مناسب نیست.

۸ - گزینه ۲ فراوانی ۵۰ مربوط به زاویه 100° در نمودار دایره‌ای است، پس فراوانی b مربوط به زاویه 60° و فراوانی a مربوط می‌شود به زاویه باقی‌مانده از دایره یعنی $200^\circ - 100^\circ - 60^\circ = 360^\circ$ پس:

$$\frac{50}{b} = \frac{100}{60} \Rightarrow b = 30$$

زاویه مشخص نشده در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$360 - 100 - 60 = 200$$

$$\frac{50}{a} = \frac{100}{200} \Rightarrow a = 100 \Rightarrow a - b = 100 - 30 = 70$$

۹ - گزینه ۲ ابتدا میانگین را به دست می آوریم.

$$\bar{x} = \frac{10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 4 + 13 \times 3 + 14 \times 1 + 15 \times 2}{3 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2} = \frac{30 + 22 + 48 + 39 + 14 + 30}{15} = \frac{183}{15} = 12,2$$

و با توجه به نمودار داده شده مد برابر ۱۲ است. (مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد).

$$c = 20 \quad \text{اختلاف خواسته شده} = 12,2 - 12 = 0,2$$

۱۰ - گزینه ۱ با توجه به اینکه دامنه میان چارکی ($IQR = Q_3 - Q_1$) برابر ۸ و دامنه تغییرات ($Max - Min$) برابر ۱۸ است و تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها کوچک‌تر از ۲۰ هستند، متوجه می‌شویم که Q_3 همان ۲۰ است. بنابراین:

$$c = 20$$

$$Q_3 - Q_1 = 8 \Rightarrow 20 - a = 8 \Rightarrow a = 12$$

$$R = Max - Min \Rightarrow d - 10 = 18 \Rightarrow d = 28$$

$$\frac{d-c}{a} = \frac{28-20}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

۱۱ - گزینه ۳ در نمودار راداری زاویه بین هر دو شعاع متوالی یکسان است. پس:

$$3x - 12^\circ = 2x + 2^\circ \Rightarrow x = 14^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + 2^\circ = 28^\circ + 2^\circ = 30^\circ$$

زاویه بین دو شعاع به صورت زیر به دست می‌آید. بنابراین:

$$\text{تعداد متغیرها} = \frac{360^\circ}{30^\circ} \Rightarrow 30^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$$

پس ۱۲ تا متغیر وجود دارد.

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

مرتب‌سازی داده‌ها و یافتن چارک‌ها

$$\rightarrow 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 8, 10, 12, 18, 20, 20, 24$$

$Q_1 = 3$ $Q_2 = \frac{4+8}{2} = 6$ $Q_3 = 10$

منظور از داده‌های بیرون جعبه، داده‌های قبل از Q_1 و داده‌های بعد از Q_3 هستند که آن‌ها را از داده‌های بالا انتخاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1, 1, 3, 20, 20, 24 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{69}{6} = 11,5$$

۱۳ - گزینه ۱ با توجه به نقاط داده شده میانگین‌ها را محاسبه می‌کنیم:

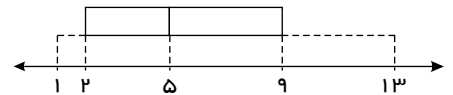
$$\bar{x} = \frac{52 + 60 + 65 + 83}{4} = \frac{260}{4} = 65$$

$$\bar{y} = \frac{162 + 165 + 173 + 180}{4} = \frac{680}{4} = 170$$

۱۴ - گزینه ۱ داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب هستند، ابتدا میانه، Q_1 و Q_3 را پیدا می‌کنیم، سپس نمودار جعبه‌ای را رسم می‌کنیم.

$$1, 2, 3, 5, 6, 9, 13$$

$Q_1 = 2$ $Q_2 = 5$ $Q_3 = 9$



داده‌های داخل و روی جعبه عبارتند از:

$$2, 3, 5, 6, 9$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 6 + 9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (9-5)^2}{5} = \frac{9 + 4 + 0 + 1 + 16}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

۱۵ - گزینه ۲ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$2, 2, 4, 6, 9, 11, 12, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 19$$

$Q_1 = 6$ $Q_2 = 12$ $Q_3 = 16$

$f = 8$: داده‌های بین میانه و چارک سوم که شامل خود چارک اول و چارک سوم باشند.

برای محاسبه زاویه هر دسته در نمودار دایره‌ای داریم: (f فراوانی دسته، N تعداد کل داده‌ها)



$$\alpha = \frac{f}{N} \times 360$$

$$\alpha = \frac{8}{14} \times 360^\circ \approx 205,7^\circ$$

۱۶ - گزینه ۲ ۲۵٪ داده‌ها در سبیل راست نمودار جعبه‌ای قرار دارند و سبیل راست نمودار B از نمودار A جلوتر است. پس تقریباً ۲۵٪ نمرات دانش‌آموزان B از همه نمرات دانش‌آموزان A بیشتر است.

۱۷ - گزینه ۲ ابتدا فرض می‌کنیم تعداد متغیرهای اولیه n باشد، در این صورت زاویه اولیه بین شعاع‌ها برابر است با:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n} \quad (1)$$

با اضافه کردن ۳ متغیر دیگر، زاویه بین $\alpha_2 = \frac{360^\circ}{n+3}$ خواهد شد، حال با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} \alpha_1 \xrightarrow{(2),(1)} \frac{360^\circ}{n+3} = \frac{2}{3} \times \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+3} = \frac{2}{3n} \xrightarrow{\text{طرفین بسطین می‌کنیم}} 3n = 2(n+3) \Rightarrow 3n = 2n + 6 \Rightarrow n = 6$$

پس زاویه بین متغیرها در حالت اول برابر است با:

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

۱۸ - گزینه ۱

ابتدا داده‌ها را مرتب کنید:

۱, ۴, ۷, ۸, ۹, ۱۱, ۱۸, ۲۰, ۲۱

$$Q_1 = \frac{4+7}{2} = 5,5 \quad Q_2 = \frac{18+20}{2} = 19$$

(از آنجایی که تعداد داده‌ها فرد است؛ داده وسط میانه است.)

۲۱ = بزرگ‌ترین داده و ۱ = کوچک‌ترین داده

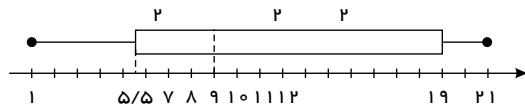
۹ = داده پنجم = میانه \Rightarrow تعداد داده‌ها

۴ = تعداد داده‌ها در نیمه اول یا در نیمه دوم

$$Q_1 = \frac{\text{داده سوم} + \text{داده دوم}}{2} = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$Q_2 = \frac{\text{داده هشتم} + \text{داده هفتم}}{2} = \frac{18+20}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

با توجه به داده‌های بالا نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید:



۱۹ - گزینه ۱ حداکثر نمره هر درس ۲۰ است. ابتدا نمره هر درس را با توجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\text{عربی} : \frac{20}{100} \times 20 = 4 \quad , \quad \text{زبان} : \frac{25}{100} \times 20 = 5$$

$$\text{فارسی} : \frac{80}{100} \times 20 = 16 \quad , \quad \text{دینی} : \frac{70}{100} \times 20 = 14$$

$$\text{میانگین وزن‌دار} = \frac{4 \times 1 + 5 \times 2 + 16 \times 4 + 14 \times 3}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{4 + 10 + 64 + 42}{10} = \frac{120}{10} = 12$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۴ - ۲

۷ - ۴

۱۰ - ۱

۱۳ - ۱

۱۶ - ۲

۱۹ - ۱

۲ - ۳

۵ - ۱

۸ - ۲

۱۱ - ۳

۱۴ - ۱

۱۷ - ۲

۳ - ۲

۶ - ۱

۹ - ۲

۱۲ - ۱

۱۵ - ۲

۱۸ - ۱