



فصل اول : مبانی ریاضی

۱- اگر A و B و C سه مجموعه باشند و $C \subset B$ و $A \subset B$ و $C \cap A = \emptyset$ حاصل $(A \cup C) \cap B$ کدام است؟

- ۱) A ۲) $A - C$ ۳) C ۴) \emptyset

۲- گزاره $[p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)]$ هم‌ارز با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- ۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۳- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 5\}$ دامنه‌ی متغیر باشد ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست می‌باشد؟

الف) $\forall x \in A, x + 6 < 11$ (ب) $\exists x \in A, x^2 > 5$ (ج) $\exists x \in A, x^2 + 2 = 18k$

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴- نقیض گزاره‌ی «حداقل یک عدد حقیقی وجود دارد به‌طوری‌که زوج یا مربع کامل باشد» کدام است؟

- ۱) هیچ عدد حقیقی زوج و مربع کامل نیست. ۲) هر عدد حقیقی فرد است و مربع کامل نیست.
 ۳) هر عدد حقیقی فرد و مربع کامل نیست. ۴) بعضی از اعداد حقیقی زوج و مربع کامل نیستند.

۵- اگر $a \in \mathbb{R}$ آنگاه $|a| \geq 0$ چه نوع شرطی برای $a^2 = a^4$ است؟

- ۱) لازم ۲) کافی ۳) لازم و کافی ۴) نه لازم نه کافی

۶- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند. $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

- ۱) B' ۲) \emptyset ۳) $A \cap B$ ۴) $A - B$

۷- گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

- ۱) $(p \vee q) \wedge r$ ۲) $(p \vee q) \vee r$ ۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ۴) $(p \wedge q) \wedge r$

۸- دو مجموعه‌ی $A = \{x^2 - 8, 4 - 4x\}$ و $B = \{y^2 + 3\}$ مساوی هستند، $x + y$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۷ ۲) -۳ ۳) -۱۱ ۴) ۱

۹- کدام گزاره نادرست است؟ (\mathbb{E} مجموعه‌ی اعداد زوج و \mathbb{O} مجموعه‌ی اعداد فرد است.)

- ۱) $\forall x \in \mathbb{Z}; 5|x| + 2 \geq 0$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 ۳) $\exists x \in \mathbb{E}; x + 3 \in \mathbb{O}$ ۴) $\exists x \in \mathbb{R}; x > |x|$

۱۰- اگر $A \subset B$ باشد آنگاه کدام بیان نادرست است؟

- ۱) $A \cap B' = \emptyset$ ۲) $B' \subset A'$ ۳) $B \cap A' = \emptyset$ ۴) $A' \cup B = M$

۱۱- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x < 1\}$ دامنه‌ی متغیر باشد آنگاه کدام یک از گزاره‌های سوری زیر ارزش درستی دارد؟

- ۱) $\exists x \in A: x^2 + 2x > 0$ ۲) $\forall x \in A: x^2 + 2x^2 \leq 30$ ۳) $\forall x \in A: 2^x \leq 0$ ۴) $\exists x \in A: 5^x < 0$

۱۲- از برابری $A \cup B = B \cap C$ برای سه مجموعه‌ی A, B و C ، همواره چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

- ۱) $B \subseteq A \subseteq C$ ۲) $C \subseteq A \subseteq B$ ۳) $A \subseteq B \subseteq C$ ۴) $C \subseteq B \subseteq A$



۲۵- از کیسه‌ای که محتوای آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟

- ① $\frac{7}{22}$ ② $\frac{17}{44}$ ③ $\frac{9}{22}$ ④ $\frac{19}{44}$

۲۶- یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد بر ۵ بخش پذیر باشد یا بر ۲ بخش پذیر نباشد، کدام است؟

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{4}{10}$ ③ $\frac{6}{10}$ ④ $\frac{9}{10}$

۲۷- دو تاس را با هم می‌ریزیم. در صورتی که بدانیم مجموع دو عدد رول شده بیش تر از ۴ است، احتمال اینکه کوچک ترین عدد رول شده ۳ باشد، کدام است؟

- ① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{7}{30}$ ④ $\frac{3}{10}$

۲۸- سه ظرف، اولی شامل ۲ مهره سفید و ۲ مهره سیاه، دومی شامل ۴ مهره سیاه و سومی شامل ۴ مهره سفید مفروض‌اند. از ظرف اول مهره‌ای خارج کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس مهره‌ای از طرف دوم خارج کرده و در ظرف سوم قرار می‌دهیم و سرانجام مهره‌ای از ظرف سوم خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر سه مهره خارج شده سفید باشند، کدام است؟

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{20}$

۲۹- محصولات یک کارخانه توسط سه ماشین A, B, C تولید می‌شود که به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۳۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند. می‌دانیم ۳ درصد از محصولات A و ۳ درصد از محصولات C معیوب هستند و اگر یکی از محصولات این کارخانه را به تصادف انتخاب کنیم با احتمال ۵ درصد معیوب می‌باشد، چند درصد از محصولات تولیدی ماشین B معیوب است؟

- ① ۴ ② ۵ ③ ۷ ④ ۹

۳۰- دو جعبه داریم که اولی دارای یک لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب و دومی دارای ۶ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول یک لامپ به تصادف انتخاب کرده و در جعبه دوم قرار می‌دهیم و سپس ۲ لامپ به تصادف از جعبه دوم خارج می‌کنیم. احتمال آنکه لامپ‌های خارج شده از جعبه دوم هر دو سالم یا معیوب باشند، کدام است؟

- ① $\frac{11}{45}$ ② $\frac{12}{45}$ ③ $\frac{22}{45}$ ④ $\frac{24}{45}$

۳۱- در یک خانواده چهارفرزندی، تعداد پسرها و دخترها برابر نیست. احتمال آنکه جنسیت دو فرزند اول خانواده یکسان باشد، کدام است؟

- ① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$

۳۲- در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن رو k برابر احتمال آمدن پشت است. k چقدر باشد تا در پرتاب دو بار آن سکه احتمال آمدن هر دو بار رو برابر $\frac{25}{196}$ باشد؟

- ① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{3}{11}$ ③ $\frac{9}{5}$ ④ $\frac{11}{3}$

۳۳- در پرتاب یک تاس، چه تعداد از پیشامدهای زیر مستقل از پیشامد «ظاهر شدن یک عدد زوج» هستند؟

(الف) ظاهر شدن یک عدد اول (ب) ظاهر شدن یک عدد مربع کامل

(پ) ظاهر شدن یکی از شماره‌های عدد ۶

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۳۴- دانش آموزی به ۴ سؤال از یک آزمون ۱۰ سؤالی با شماره سؤال‌های ۱ تا ۱۰ جواب داده است. احتمال اینکه مجموع شماره سؤال‌های جواب داده شده بزرگ تر از ۳۰ باشد، کدام است؟

- ① $\frac{1}{42}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{35}$ ④ $\frac{1}{30}$



۳۵- قرار است ۹ نفر را که a و b نیز جزویشان هستند در ۴ گروه دوفره توزیع کنیم به طوری که یک نفر تنها بماند. احتمال آنکه a و b هم گروه باشند چقدر است؟

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{10}$

۳۶- از میان اعداد ۱ تا ۱۰۰، عددی طبیعی به تصادف بر می‌داریم. با کدام احتمال این عدد نه مضرب ۸ است و نه مضرب ۱۲؟

- ① $\frac{33}{100}$ ② $\frac{67}{100}$ ③ $\frac{16}{100}$ ④ $\frac{84}{100}$

۳۷- احتمال باردار شدن یک خرگوش ماده در فصل‌های تابستان و پاییز برابر هم، نصف احتمال باردار شدنش در فصل بهار و دو برابر احتمال باردار شدنش در فصل زمستان است. احتمال آنکه دو خرگوش ماده هر دو در بهار باردار شوند کدام است؟

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{16}{81}$ ④ $\frac{25}{81}$

۳۸- در پرتاب یک تاس، پیشامد آنکه «عددی اول رو شود» نسبت به کدام پیشامد مستقل است؟

- ① عددی مرکب رو شود. ② عددی زوج رو شود. ③ عددی مضرب ۳ رو شود. ④ عددی مضرب ۵ رو شود.

فصل سوم : آمار توصیفی

۳۹- در داده‌هایی با جدول فراوانی

حدود دسته	۵-۷	۷-۹	۹-۱۱	۱۱-۱۳	۱۳-۱۵
فراوانی	۳	۲	a	۶	۱

- ① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۷

۴۰- جدول زیر، درصد و ضریب دروس دانش‌آموزی را نشان می‌دهد. اگر حداقل میانگین درصد دروس وی برای قبولی در آزمون ۷۰ درصد باشد، حداقل درصد ریاضی که این دانش‌آموز برای قبولی باید کسب کند، تقریباً کدام است؟

نام درس	ادبیات	زبان	ریاضی	فیزیک	شیمی
درصد نمره	۶۰	۸۰	?	۷۰	۶۵
ضریب	۴	۲	۶	۶	۹

- ① ۷۵ ② ۸۷ ③ ۸۱ ④ ۶۶

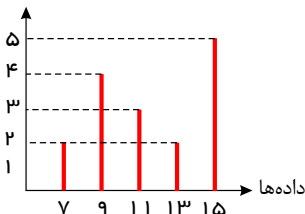
۴۱- با توجه به جدول زیر، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

طبقات	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱
درصد فراوانی نسبی	۱۵	۲۱	x	۱۰	۳۹

- ① 45° ② 30° ③ 78° ④ 54°

۴۲- میانگین داده‌های نمودار میله‌ای زیر، کدام است؟

فراوانی مطلق

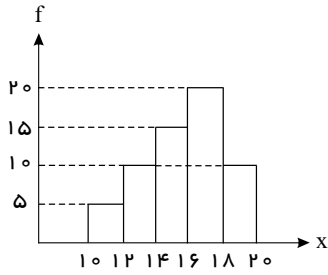


- ① ۱۳ ② ۱۲٫۵ ③ ۱۲ ④ ۱۱٫۵

۴۳- میانگین و واریانس ۲۹ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۷ و ۵ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۲، از بین آنان حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

- ① ۲٫۵۲ ② ۲٫۵۴ ③ ۲٫۶۴ ④ ۲٫۶۶

۴۴- با توجه به نمودار بافت نگاشت، میانگین داده‌های آماری تقریباً کدام است؟

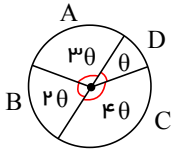


- ① ۱۵٫۳
② ۱۵٫۷
③ ۱۴٫۷
④ ۱۵

۴۵- اگر میانگین و واریانس ۲۰ داده به ترتیب ۸ و ۵ باشد و داده ۲۹ را به آنها اضافه کنیم، واریانس جدید چقدر است؟

- ① ۲۱٫۳۳ ② ۲۴٫۷۶ ③ ۱۹٫۳۱ ④ ۱۷٫۵۶

۴۶- یک شرکت تولیدی، ۴ نوع کالای A و B و C و D را تولید می‌کند. اگر نمودار دایره‌ای تولید این کارخانه در طول یک هفته به صورت شکل مقابل باشد، فراوانی نسبی کالای نوع D کدام است؟



- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{7}$

۴۷- تعداد ۶ داده آماری با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده ۱۲ و ۱۶ به این داده‌ها افزوده شود، واریانس ۸ داده جدید کدام است؟

- ① ۳٫۸ ② ۴ ③ ۴٫۲ ④ ۴٫۵

۴۸- در یک جدول فراوانی با پنج دسته، مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های اول تا سوم برابر $\frac{19}{30}$ و مجموع فراوانی نسبی دسته‌های سوم تا پنجم برابر $\frac{8}{15}$ است.

زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

- ① ۳۰ ② ۴۵ ③ ۶۰ ④ ۹۰

۴۹- نمرات آمار ۵۰ دانش آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. اختلاف میانگین وزنی نمرات از میانه آنها، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

- ① ۰٫۲۸ ② ۰٫۳۲ ③ ۰٫۳۶ ④ ۰٫۳۸

۵۰- اگر به داده‌های جدول زیر k داده اضافه کنیم، در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید زاویه متناظر به d به 20° تغییر کرده است. k کدام می‌تواند باشد؟

داده	a	b	c	d
فراوانی	۴	۶	۸	۶

- ① ۱۲ ② ۱۸ ③ ۲۴ ④ ۳۰

۵۱- ۱۲ داده آماری با مقادیر طبیعی که چارک‌های اول، دوم و سوم آنها به ترتیب ۴، ۶، ۸ است را در نمودار جعبه‌ای نشان داده‌ایم. میانگین داده‌های سمت چپ و سمت راست جعبه به ترتیب ۴ و ۸ شده است. اگر ارقام موجود در درون جعبه را به ترتیب از چپ به راست در کنار هم قرار دهیم تا یک عدد شش‌رقمی مانند A تولید شود آنگاه برای A چند مقدار متمایز یافت می‌شود؟

- ① ۱۰ ② ۶ ③ ۱۲ ④ ۱۴

۵۲- دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a و دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع b مفروض اند ($a > b$). اگر میانگین محیط و مساحت این مثلث‌ها به ترتیب ۱۸

و $3\sqrt{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ① ۶ ② ۸ ③ $6\sqrt{3}$ ④ ۱۰

۵۳- در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

- ① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{8}{9}$



۵۴- در ۶۰ داده آماری میانگین ۳ و انحراف معیار ۱٫۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- ① ۰٫۱ ② ۰٫۲ ③ ۰٫۳ ④ ۰٫۴

۵۵- اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n را با σ^2 نشان دهیم، مجموع واریانس داده‌های $3! + 3, 3, 5x_2 + 3!, \dots, 3, 5x_n + 3!$ و داده‌های $3x_1 - 7, 3x_2 - 7, \dots, 3x_n - 7$ کدام است؟

- ① $11,56\sigma^2$ ② $15,25\sigma^2$ ③ $21,25\sigma^2$ ④ $12,25\sigma^2$

۵۶- تعدادی داده آماری در اختیار داریم. همه آنها را بر میانه داده‌ها تقسیم می‌کنیم. میانه داده‌های جدید چیست؟

- ① صفر ② همان عدد قبلی ③ ۱ ④ دو برابر عدد قبلی

۵۷- میانگین و واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب ۵ و ۹ می‌باشند. ضریب تغییرات داده‌های $1 - 2x_1, 1 - 2x_2, \dots, 1 - 2x_n$ تقریباً کدام است؟

- ① $-0,67$ ② $0,67$ ③ $-0,48$ ④ $0,48$

۵۸- از بین داده‌های ۱۷، ۱۵، ۱۲، ۱۷، ۱۹ یک داده را به گونه‌ای حذف می‌کنیم تا میانگین داده‌های جدید نسبت به میانگین داده‌های قبلی بیشترین تغییر را داشته باشد، اگر میانگین، میانه و مد داده‌های جدید به ترتیب برابر a, b, c باشد، آنگاه حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- ① ۵۱ ② $50,5$ ③ ۵۰ ④ $49,5$

فصل چهارم : آمار استنباطی

۵۹- در جامعه‌ای با انحراف معیار σ ، کران بالای فاصله اطمینان بیش از ۹۵ درصد، برابر ۵۱ است. اگر برآورد میانگین ۴۳ باشد، مقدار انحراف معیار برآورد میانگین کدام است؟

- ① ۲ ② ۴ ③ ۸ ④ ۱۶

۶۰- در انتخاب یک نمونه دوتایی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ ، با کدام احتمال میانگین نمونه و جامعه یکسان است؟

- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{25}$ ③ $\frac{1}{49}$ ④ $\frac{1}{50}$

۶۱- وزارت بهداشت می‌خواهد وضعیت بهداشت و درمان ۱۰۰۰ دانش‌آموز در مناطق سیلزده استان لرستان را بررسی کند. برای این کار با استفاده از نمونه‌گیری تصادفی ۵۰ دانش‌آموز را انتخاب می‌کند، شانس کدام دانش‌آموزان برای انتخاب بالاتر است؟

- ① دانش‌آموزان مقاطع بالاتر تحصیلی ② دانش‌آموزان با معدل بالاتر
③ دانش‌آموزانی که یکی از اعضای خانواده‌شان را از دست داده‌اند ④ شانس انتخاب همه دانش‌آموزان یکسان است.

۶۲- یک جامعه از ۶ نفر تشکیل شده که درآمد ماهیانه آنها برحسب میلیون تومان به صورت $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$ است. احتمال برابری میانگین نمونه و جامعه در نمونه‌های دوعضوی این جامعه چند برابر همین احتمال در نمونه‌های سه‌عضوی این جامعه است؟

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

۶۳- در بررسی یک نمونه تصادفی ۲۵ نفره از یک جامعه، میانگین و انحراف معیار قد آنها ۱۶۰ و ۴ بوده است. اگر انحراف معیار جامعه برابر ۵ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین قد اعضای این جامعه کدام است؟

- ① $[158,4, 161,6]$ ② $[159,2, 160,8]$ ③ $[158, 162]$ ④ $[159, 161]$

۶۴- کدام گزینه جزء روش‌های نمونه‌گیری احتمالی نمی‌باشد؟

- ① سیستماتیک ② دادگان ③ خوشه‌ای ④ طبقه‌ای



۶۵- فرض کنید در شهری جمعیت کلاس‌های پایه یازدهم به شکل زیر باشد:

تعداد دانش‌آموزان	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
تعداد کلاس	۵	۶	۳	۷

فرض کنید فردی برای آن که بفهمد کلاس‌های یازدهم چند نفری‌اند، تعداد زیادی دانش‌آموز یازدهمی را به تصادف انتخاب می‌کند و از آن‌ها می‌پرسد کلاس شما چند نفره است؟ اگر با این روش درصد کلاس‌های ۳۰ نفری را محاسبه کند نتیجه از جواب واقعی تقریباً چقدر فاصله دارد؟

- ① ۰ ② ۰٫۰۱ ③ ۰٫۰۲ ④ ۰٫۰۳

۶۶- فرض کنید جامعه‌ای از ۶ عضو $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ تشکیل شده باشد. اگر بخواهیم به صورت تصادفی ساده نمونه‌ای انتخاب کنیم و p احتمال این باشد که در سه انتخاب با جایگذاری نمونه به صورت $\{a_1, a_2, a_3\}$ بوده و q همان احتمال باشد ولی در حالتی که بدون جایگذاری باشد آن‌گاه $|p - q|$ کدام است؟

- ① ۰ ② $\frac{7}{360}$ ③ $\frac{49}{1080}$ ④ $\frac{1}{45}$

۶۷- در نمونه‌گیری خوشه‌ای از ۵ گروه A, B, C, D, E که A دارای ۵ عضو A_1, A_2, \dots, A_5 و B دارای ۷ عضو B_1, B_2, \dots, B_7 و C دارای ۶ عضو C_1, C_2, \dots, C_6 و D دارای ۹ عضو D_1, D_2, \dots, D_9 و E در نهایت ۱۲ عضو E_1, E_2, \dots, E_{12} است. ۳ گروه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که A_1, A_2 و C_1 انتخاب شوند چقدر است؟

- ① $(\frac{3}{5})^3$ ② $\frac{9}{25}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{11}{39}$

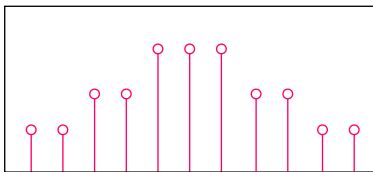
۶۸- بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات درس ریاضیات گسسته دانش‌آموزان کل کشور در امتحانات نهایی براساس دو نمونه به اندازه‌های n_1 و n_2 به ترتیب به صورت $[12, 12, 8]$ و $[12, 13, 2]$ به دست آمده است. نسبت n_2 به n_1 کدام است؟

- ① ۲ ② ۴ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$

۶۹- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- ① در نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب واحدهای آماری در یک طبقه خاص با هم برابر است.
 ② همه واحدهای آماری جامعه برای انتخاب شدن در نمونه، در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال یکسان دارند.
 ③ اندازه طبقات در نمونه‌گیری سیستماتیک با هم برابر است.
 ④ مجموعه کل متغیرهای آماری را جامعه آماری می‌نامند.

۷۰- اگر نمودار احتمال در جامعه‌ای به صورت زیر باشد و ارتفاع ستون‌های بزرگ و متوسط به ترتیب ۳ و ۲ برابر ارتفاع ستون کوچک باشد، ارتفاع ستون بزرگ چقدر است؟



- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{20}$

۷۱- در جامعه‌ای با انحراف معیار ۲٫۲۵، نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۳۶ می‌گیریم، با اطمینان ۹۵ درصد میانگین نمونه حداکثر چه مقدار با میانگین جامعه تفاوت دارد؟

- ① ۰٫۵ ② ۰٫۷۵ ③ ۱ ④ ۰٫۳۷۵

۷۲- در جامعه $\{\frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{168}\}$ برآورد نقطه‌ای میانگین کل جامعه تقریباً کدام است؟

- ① ۰٫۰۱ ② ۰٫۰۲ ③ ۰٫۰۴ ④ ۰٫۰۵

۷۳- روش مناسب گردآوری داده‌ها در کدام یک از گزینه‌های زیر درست آمده است؟

- ① میزان رضایت مشتریان یک بانک جدید از نحوه برخورد: دادگان
 ② میزان رضایت دانش‌آموزان یک مدرسه از مدرسه: مصاحبه
 ③ مردم یک شهر، خودرو با چه رنگی را بیشتر می‌پسندند: مشاهده
 ④ طول قد دانش‌آموزان یک کلاس: دادگان

۷۴- اگر انحراف معیار جامعه‌ای از ۱۸ برابر انحراف معیار برآورد میانگین کمتر باشد، حداکثر مقدار اندازه نمونه چقدر است؟

- ① ۳۲۴ ② ۳۲۳ ③ ۲۸۹ ④ ۲۸۸

پاسخنامه تشریحی

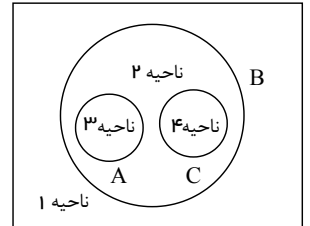
۱ - گزینه ۳ روش اول:

$$A \subset B, C \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup B \Rightarrow A \cup C \subset B$$

$$\Rightarrow (A \cup C) \cap B = A \cup C \Rightarrow [(A \cup C) \cap B] \cap A' \stackrel{A \cup C \subset B}{=} (A \cup C) \cap A' = C \cap A' = C - A \stackrel{A \cap C = \emptyset}{=} C$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} [(A \cup C) \cap B] \cap A' &= \underbrace{[(3, 4) \cap (2, 3, 4)]}_{(3, 4)} \cap (1, 2, 4) \\ &= [(3, 4) \text{ یواحی}] \cap (1, 2, 4 \text{ یواحی}) = 4 \text{ ناحیه} = C \end{aligned}$$



۲ - گزینه ۴

تذکر:

$$\begin{aligned} ۱) \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases} & \quad ۲) p \wedge \sim p \equiv F \quad ۳) \sim p \vee p \equiv T \\ ۴) F \vee p \equiv p & \quad ۵) T \wedge p \equiv p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)] &\equiv \sim [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)] \\ &\equiv \sim [F \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge T] \equiv \sim (p \wedge q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p) \\ &\equiv \sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F \equiv \sim q \end{aligned}$$

۳ - گزینه ۳

نکته: یک گزاره با سور عمومی x ، زمانی نادرست است که دارای مثال نقض باشد و یک گزاره با سور وجودی، زمانی نادرست است که مجموعه جواب آن تهی باشد.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) واضح است این گزاره مثال نقضی ندارد یعنی به ازای هر مقدار x در مجموعه A رابطه $x + 6 < 11$ برقرار است. پس این صحیح است.

(ب) گزاره B نادرست است زیرا بازای هیچ مقداری از x رابطه $x^2 > 5$ برقرار نیست.

(ج) گزاره C نادرست است زیرا مجموعه جواب آن تهی است یعنی به ازای هیچ مقدار از x رابطه $x^2 + 2 = \lambda k$ صحیح نمی‌باشد.

۴ - گزینه ۲

نکته: نفیض سور وجودی، سور عمومی است.

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

در این تست:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}, (x = 2k \vee x = q^2)) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 2k \wedge x \neq q^2)$$

۵ - گزینه ۱

نکته: گزاره $q \Rightarrow p$ را به صورت p شرط کافی است برای q و q شرط لازم است برای p می‌خوانیم.

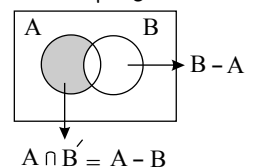
اگر $a \in \mathbb{R}$ آنگاه $|a| \geq 0$ یک گزاره همواره درست است پس از هر گزاره‌ای می‌توان آن را نتیجه گرفت یعنی:

$$a^2 = a^2 \Rightarrow |a| \geq 0$$

ولی عکس این گزاره لزوماً درست نمی‌باشد.

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم $A \cap B' = A - B$ ؛ در نمودار ون روبه‌رو دو مجموعه $A - B$ و $B - A$ اشتراکی ندارند، داریم:

$$(A \cap B') - (B - A) = \underbrace{(A - B) - (B - A)}_{\text{فاقد اشتراک}} = A - B$$



نکته:

$$1) p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad 2) p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv \sim(\sim p) \vee (\sim q \Rightarrow r) \equiv p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

۸ - گزینه ۳

چون مجموعه های داده شده مساوی هستند باید تعداد اعضایشان با هم برابر باشد، پس اعضای مجموعه ی A تکراری هستند و داریم:

$$x^2 - 8 = 4 - 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -6$$

$$x = 2 \Rightarrow \{-4\} = \{y^2 + 3\} \Rightarrow -4 = y^2 + 3 \Rightarrow y^2 = -7 \text{ غ.ق.}$$

$$x = -6 \Rightarrow \{28\} = \{y^2 + 3\} \Rightarrow 28 = y^2 + 3$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$$

$$x = -6, y = \pm 5 \Rightarrow x + y = -1 \text{ یا } x + y = -11$$

۹ - گزینه ۴

تذکر: سور عمومی با دستور $\forall x; p(x)$ زمانی نادرست است که به ازای عضوی از دامنه متغیر دارای مثال نقض باشد.

تذکر: سور وجودی با دستور $\exists x; p(x)$ زمانی درست است که بتوان یک عضو از دامنه متغیر مانند x یافت به طوری که در رابطه $p(x)$ صدق کند.

بررسی گزینه ها:

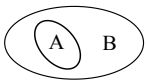
گزینه ۱: همواره برای هر عدد صحیح برقرار است و مثال نقضی ندارد.

گزینه ۲: این اتحاد مثلثاتی به ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ برقرار است و مثال نقضی ندارد.

گزینه ۳: واضح است مجموع دو عدد زوج و فرد عددی فرد است.

گزینه ۴: می دانیم به ازای هر مقدار حقیقی x همواره رابطه $|x| \leq x$ برقرار است بنابراین این سور وجودی به ازای هیچ مقدار $x \in \mathbb{R}$ برقرار نیست و ارزش سور وجودی نادرست است.

۱۰ - گزینه ۳



اگر $A \subset B$ باشد آنگاه $B' \subset A'$ و $A \cap B' = A - B \stackrel{ACB}{=} \emptyset$ و $A' \cup B = M, A \cap B' = A - B \neq \emptyset, A' \cup B = M, A \cap B' = A - B \neq \emptyset$ است.

۱۱ - گزینه ۲ گزینه ۱ نادرست است، چون از اعضاء مجموعه $A = \{-4, -3, -2, -1\}$ هیچ یک در معادله $x^2 + 2x > 0$ صدق نمی کند. گزینه ی ۲ درست است چون بیشترین مقدار

عبارت $x^2 + 2x$ از بین اعضاء A با (-4) اتفاق می افتد که برابر $2(16) + 2(16) = 256 + 32 = 288$ است و از 0 کمتر است. گزینه های ۳ و ۴ نادرست هستند چون عبارت a^x به ازای $a > 0$ همیشه

مثبت هستند حتی اگر x منفی باشد.

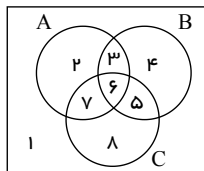
۱۲ - گزینه ۳ روش اول:

$$x \in A \xrightarrow{A \subseteq A \cup B} x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B \cap C} x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \quad (1)$$

$$x \in B \xrightarrow{B \subseteq A \cup B} x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B \cap C} x \in B \cap C \Rightarrow x \in C \Rightarrow B \subseteq C \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C$$

روش دوم: به کمک نمودار ون داریم:



$$A \cup B = B \cap C \Rightarrow \text{نواحی } 5, 6 = \text{نواحی } 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

آن نواحی که در یک طرف تساوی قرار دارند و در طرف دیگر نیستند را تهی می گذاریم:

یعنی $\emptyset = 2, 3, 4, 7$ پس ناحیه ۶ $A = 6$ و نواحی $B = 5, 6$ و نواحی $C = 5, 6, 8$ واضح است $A \subseteq B \subseteq C$ می باشد.

۱۳ - گزینه ۲ الف) به ازای هر عدد حقیقی x ، وجود دارد عددی حقیقی مانند y که $x + y = 0$ باشد یعنی هر عدد حقیقی قرینه دارد که درست است.

ب) وجود دارد عددی حقیقی x که به ازای هر عدد حقیقی مانند y ، $x + y = 0$ می باشد واضح است که چنین x ای وجود ندارد.

ج) در مجموعه اعداد حقیقی، عددی هست که از هر عدد حقیقی کوچک تر یا مساوی باشد که نادرست است.

۱۴ - گزینه ۳ تعداد زیرمجموعه های a عضوی یک مجموعه n عضوی، برابر $\binom{n}{a}$ است. در این سؤال تعداد عضوهای A را بر n فرض می کنیم. تعداد زیرمجموعه های دو عضوی A ، برابر

$$\binom{n}{2} \text{ می شود. تعداد زیرمجموعه های تک عضوی } A, \text{ برابر } \binom{n}{1} = n \text{ می شود. گفته شده که } \binom{n}{2} = 77, \text{ واحد از } n \text{ بیشتر است. پس داریم:}$$

$$\binom{n}{2} - n = 77 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 77 \Rightarrow n(n-1) - 2n = 2 \times 77 \Rightarrow n(n-1-2) = 2 \times 77 \Rightarrow n(n-3) = 14 \times 11 \Rightarrow n = 14$$

پس A یک مجموعه ۱۴ عضوی است. مطابق صورت سؤال، عدد ۷ عضو A است. می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی شامل عدد ۷ برای A را پیدا کنیم. فرم کلی زیرمجموعه سه عضوی شامل ۷ به صورت $\{7, \circ, \circ\}$ است. A شامل ۱۴ عضو بود. اگر ۷ را کنار بگذاریم، $14 - 1 = 13$ عضو برای A باقی می‌ماند. ما باید ۲ تا از این ۱۳ عضو را انتخاب کنیم تا $\{7, \circ, \circ\}$ به یک زیرمجموعه سه عضوی شامل ۷ تبدیل شود. تعداد روش‌های انتخاب ۲ از ۱۳ برابر $13 \times 6 = 78$ است. $\binom{13}{2} = \frac{13(13-1)}{2} = 78$ است.

۱۵ - گزینه ۲ نکته: مجموعه A را زیرمجموعه B نامند هرگاه هر عضو A متعلق به B نیز باشد یعنی:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

نکته: دو مجموعه A و B را مساوی نامند هرگاه هم A زیرمجموعه B و هم B زیرمجموعه A باشد یعنی:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

با توجه به توضیحات فوق جواب تست گزینه ۲ می‌باشد.

۱۶ - گزینه ۲

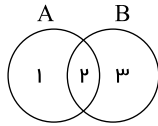
تذکر: اگر A و B دو مجموعه باشند:

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} 1) A \cap C \subseteq B \cap D \\ 2) A \cap C \subseteq B \cup D \\ 3) A \cup C \subseteq B \cup D \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq B' \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{نکته ۱}} A \cap A \subseteq B \cap B' \Rightarrow A \subseteq \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subseteq A} A = \emptyset$$

۱۷ - گزینه ۱

با کمک نمودار ون داریم:



$$A \cup B = A - B \Rightarrow \{1, 2, 3\} = \{1\} \Rightarrow \{2, 3\} = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$$

۱۸ - گزینه ۴ مجموعه A دو عضو به صورت x و $\{x\}$ دارد که هیچ‌یک از آن‌ها در B نیستند.

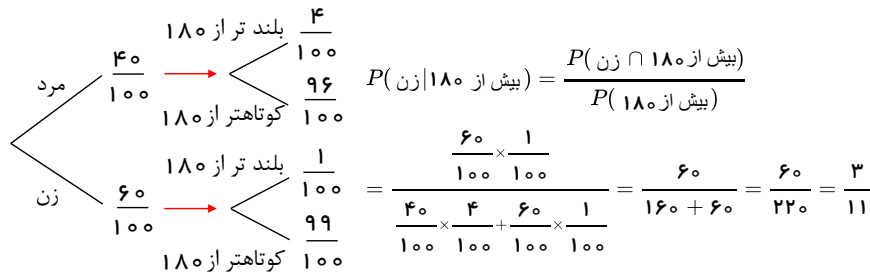
۱۹ - گزینه ۱

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

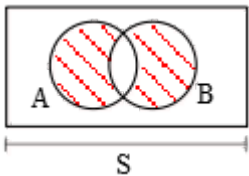
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$$

۲۰ - گزینه ۱

طبق نمودار درختی خواهیم داشت:



۲۱ - گزینه ۴ برای حل این سؤال از نمودار ون استفاده می‌کنیم: نواحی هاشورزده یکی $A - B$ (A رخ دهد B رخ ندهد) و دیگری $B - A$ (B رخ دهد A رخ ندهد) است چون قرار است فقط یکی از این دو پیشامد رخ دهد اجتماع نواحی هاشورخورده مورد نظر می‌باشد.



۲۲ - گزینه ۱

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{\binom{6}{2} \times 1 \times 4!}{6!} = \frac{1}{2}$$

روش اول: ابتدا این زن و شوهر ۲ مکان از ۶ وضعیت را برای ورود انتخاب می‌کنند $\binom{6}{2}$

واضح است که فقط ۱ حالت جای گشت خواهند داشت (چون ابتدا زن بعد مرد باید وارد شود) می‌ماند ۴ نفر دیگر که حالت جای گشت دارند.

روش دوم: شوهر یا بعد از زن وارد می‌شود یا قبل از او. پس احتمال اینکه بعد از زن وارد شود $\frac{1}{2}$ است.

۲۳ - گزینه ۱ چون A و B و C پیشامد قبول شدن این سه نفر مستقل از هم هستند پس A' و B' و C' نیز مستقلند.

$$P(\text{قبول شدن حداقل یکی}) = 1 - P(\text{قبول نشدن هیچ‌کدام}) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A')P(B')P(C')$$

$$= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.2)(1 - 0.9) = 0.952 = 95.2\%$$

۲۴ - گزینه ۲ پیشامد مطلوب A آن است که هر ۲ مهره را از بین ۵ مهره سفید و یا از بین ۵ مهره سیاه انتخاب کنیم، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10 + 10}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

۲۵ - گزینه ۳

قرمز	سیاه	سفید
۳	۴	۵

متمم پیشامدی که در بین مهره‌های خارج شده مهره سفید نیست یا سیاه نیست، حالتی است که در بین مهره‌های خارج شده هم سفید باشد هم سیاه.

$$P(\text{مطلوب}) = 1 - P(\text{بین ۳ مهره خارج شده هم سفید باشد هم سیاه})$$

$$= 1 - \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} + \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = 1 - \frac{40 + 30 + 60}{220} = \frac{9}{22}$$

۲۶ - گزینه ۳

تعداد اعداد صحیح در بازه $(m, n]$ که مضرب k می‌باشند از دستور $\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{m}{k}\right]$ حاصل می‌شود.

پیشامد بخش پذیر بودن بر ۲: B و پیشامد بخش پذیر بودن بر ۵: A

$$P(A \cup B) = P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$$

$$= 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(B \cap A')$$

$$= 1 - P(B - A) = 1 - (P(B) - P(A \cap B))$$

$$n(S) = 90$$

$$n(B) = \left[\frac{99}{2}\right] - \left[\frac{9}{2}\right] = 49 - 4 = 45$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{99}{10}\right] - \left[\frac{9}{10}\right] = 9 - 0 = 9$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{45}{90} - \frac{9}{90}\right) = 1 - \frac{36}{90} = \frac{54}{90} = \frac{6}{10}$$

روش دوم: از هر ۵ عدد متوالی یکی بر ۵ بخش پذیر است و از هر ۲ عدد متوالی یکی بر ۲ بخش پذیر نیست:

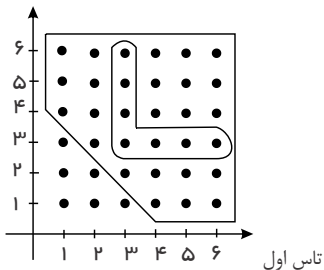
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$$

۲۷ - گزینه ۳

تاس دوم

در این سوال فضای نمونه‌ای همه حالاتی است که مجموع ارقام دو تاس بیشتر از ۴ باشد. در میان این حالات مطلوب حالاتی است که عدد

کوچکتر رو شده ۳ باشد.



در شکل، فضای نمونه‌ای کاهش یافته و پیشامد مطلوب نمایش داده شده است. با توجه به شکل، احتمال این که کوچک‌ترین عدد رو شده ۳ باشد به شرطی که مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴ باشد برابر

$$\frac{7}{30} \text{ است.}$$

۲۸ - گزینه ۱ احتمال خارج شدن مهره سفید از طرف اول برابر $\frac{1}{2}$ است. اگر یک مهره سفید به طرف دوم اضافه کنیم، این طرف شامل یک مهره سفید و ۴ مهره سیاه می‌شود که در نتیجه

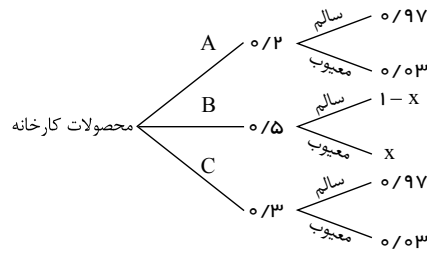
احتمال خارج شدن مهره سفید برابر $\frac{1}{5}$ است. با اضافه کردن یک مهره سفید به طرف سوم، این طرف شامل ۵ مهره سفید خواهد بود و در نتیجه احتمال خروج مهره سفید از این طرف برابر ۱

می‌باشد. بنابراین احتمال آنکه هر سه مهره خارج شده سفید باشند، برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{10}$$

۲۹ - گزینه ۳

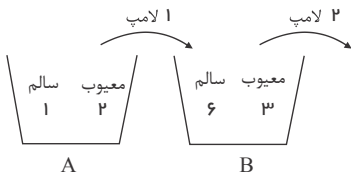
ابتدا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



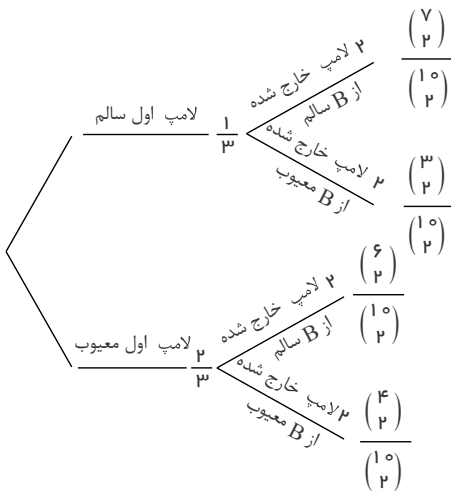
طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب بودن}) = 0.2 \times 0.03 + 0.5 \times x + 0.3 \times 0.03 \Rightarrow 0.05 = 0.015 + 0.5x \Rightarrow 0.5x = 0.035 \Rightarrow x = 0.07$$

۳۰ - گزینه ۳ روش اول:



به کمک نمودار درختی:



$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{3} \times \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{3} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{3} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{21+3}{45} + \frac{2}{3} \times \frac{15+6}{45} = \frac{8}{45} + \frac{14}{45} = \frac{22}{45}$$

روش دوم:

اگر پیشامدهای B_1 و B_2 به ترتیب سالم و معیوب بودن لامپ انتخابی از جعبه اول و پیشامد A سالم بودن هر دو لامپ یا معیوب بودن هر دو لامپ انتخابی از جعبه دوم باشد، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{\binom{7}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{3} \times \frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{21+3}{45} + \frac{2}{3} \times \frac{15+6}{45} = \frac{8}{45} + \frac{14}{45} = \frac{22}{45}$$

۳۱ - گزینه ۴ تعداد حالت‌های فضای نمونه برای ۴ فرزند، برابر $2^4 = 16$ است. از طرفی تعداد حالت‌هایی که این خانواده دارای ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد، برابر $\binom{4}{2}$ است.

بنابراین اگر A پیشامد برابر نبودن تعداد فرزندان پسر و دختر در این خانواده باشد، آنگاه داریم:

$$n(A) = 16 - 6 = 10$$

اگر B پیشامد یکسان بودن جنسیت دو فرزند اول خانواده باشد، آنگاه داریم:

$$A \cap B = \{(پ, پ, پ, پ), (د, پ, پ, پ), (پ, د, پ, پ), (د, د, د, د), (د, د, د, پ), (پ, د, د, د), (د, د, پ, د)\}$$

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



روش دوم: تذکر: در احتمال شرطی فضای نمونه‌ای محدود به پیشامد اگر یا شرط مسأله می‌باشد.

برابر بودن تعداد فرزندان دختر پسر
 $n(s) \rightarrow 2^4 - 6 = 10$

پیشامد یکسان بودن جنسیت دو فرزند اول
 $A \rightarrow \{(پ, پ), (د, د), (پ, د), (د, پ)\}$

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۳۲ - گزینه ۱ طبق فرض سؤال خواهیم داشت:

$$P(رو) = k \cdot P(پشت)$$

$$P(رو) + P(پشت) = 1 \Rightarrow kP(پشت) + P(پشت) = 1 \rightarrow (k+1)P(پشت) = 1 \Rightarrow P(پ) = \frac{1}{k+1} \Rightarrow P(رو) = \frac{k}{k+1}$$

$$P(هر دو بار رو) = \frac{25}{196} = \left(\frac{5}{14}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \left(\frac{5}{14}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{k+1} = \frac{5}{14} \Rightarrow 14k = 5(k+1) \Rightarrow 9k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{9}$$

۳۳ - گزینه ۳ فضای نمونه پرتاب یک تاس به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر پیشامد ظاهر شدن یک عدد زوج را A بنامیم، داریم:

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حال مستقل یا وابسته بودن هر یک از پیشامدهای داده شده را نسبت به پیشامد A بررسی می‌کنیم:

$$(ظاهر شدن یک عدد اول) B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow$$

پیشامدهای A و B وابسته‌اند.

$$(ظاهر شدن یک عدد مربع کامل) C = \{1, 4\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap C = \{4\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(C) \Rightarrow$$

پیشامدهای A و C مستقل از یکدیگرند.

$$(ظاهر شدن یکی از شماره‌های عدد ۶) D = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$A \cap D = \{2, 6\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(A) \times P(D) \Rightarrow$$

۳۴ - گزینه ۴ معلوم است که $|S| = \binom{10}{4} = 210$

برای آنکه مجموع شماره‌ها بیش از ۳۰ باشد، یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

$$10, 9, 8, 5 \cdot III$$

$$10, 9, 8, 6 \cdot II$$

$$10, 9, 8, 7 \cdot I$$

$$10, 9, 7, 5 \cdot VI$$

$$10, 9, 7, 6 \cdot V$$

$$10, 9, 8, 4 \cdot IV$$

$$10, 8, 7, 6 \cdot VII$$

$$P(A) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

بنابراین $|A| = 7$ و در نتیجه $|A| = 7$ بنا بر این ۳۵ - گزینه ۱ راه حل اول.

$$|S| = \frac{9!}{(2!)^4}, |A| = \binom{4}{1} \times \frac{7!}{(2!)^3} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{9!}{16}} = \frac{8!}{9!} = \frac{1}{9}$$

راه حل دوم. a با یکی از ۸ نفر دیگر هم گروه است و یا تنها خواهد ماند که همه این ۹ حالت، هم شانس هستند، بنابراین جواب مورد نظر $\frac{1}{9}$ است.

۳۶ - گزینه ۴: A : اعدادی که بر ۸ بخش پذیرند.

B : اعدادی که بر ۱۲ بخش پذیرند.

$A \cap B$: اعدادی که بر ۲۴ بخش پذیرند.



$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{100}{8} + \frac{100}{12} - \frac{100}{24} \right) = 1 - \left(\frac{12}{100} + \frac{8}{100} - \frac{4}{100} \right)$$

$$= 1 - \frac{16}{100} = \frac{84}{100}$$

۳۷ - گزینه ۳ جمع احتمالها باید برابر ۱ باشد:

$$P(\text{بهار}) + P(\text{تابستان}) + P(\text{پاییز}) + P(\text{زمستان}) = 1 \Rightarrow 4x + \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{9x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{9} \Rightarrow 2x = \frac{4}{9} \Rightarrow P(\text{بهار}) = \frac{4}{9}$$

چون باردار شدن دو خرگوش دو پدیده مستقل از هم هستند. احتمال اینکه هر دو خرگوش ماده در بهار باردار شوند، برابر ضرب (بهار) در خودش است. داریم:

$$P(\text{هر دو بهار}) = P(\text{بهار})P(\text{بهار}) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

۳۸ - گزینه ۳ اگر پیشامد رو شدن عدد اول را A بنامیم، آنگاه $A = \{2, 3, 5\}$ است.

حال گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

۱) $\begin{cases} A = \{2, 3, 5\} \\ B = \{4, 6\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

۲) $\begin{cases} A = \{2, 3, 5\} \\ B = \{2, 4, 6\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

۳) $\begin{cases} A = \{2, 3, 5\} \\ B = \{3, 6\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{3\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A$ و B مستقل‌اند.

۴) $\begin{cases} A = \{2, 3, 5\} \\ B = \{5\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{5\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

۳۹ - گزینه ۱

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ می‌باشند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i = \frac{1}{12+a} ((3 \times 6) + (2 \times 8) + (a \times 10) + (6 \times 12) + (1 \times 14)) = \frac{120 + 10a}{12+a} = \frac{10(12+a)}{12+a} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{12+a} (3(6-10)^2 + 2(8-10)^2 + a(10-10)^2 + 6(12-10)^2 + 1(14-10)^2)$$

$$= \frac{1}{12+a} (48 + 40 + 0 + 24 + 16) = \frac{96}{12+a} = 6 \Rightarrow 72 + 6a = 96 \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

۴۰ - گزینه ۳ درصد نمره ی ریاضی را برابر x در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow 70 = \frac{1}{4+2+6+6+9} ((4 \times 60) + (2 \times 80) + (6x) + (6 \times 75) + (9 \times 65))$$

$$\rightarrow 70 = \frac{1405 + 6x}{27} \rightarrow 1405 + 6x = 1890 \rightarrow 6x = 485 \rightarrow x \sim 81$$

۴۱ - گزینه ۴ در یک جدول فراوانی، مجموع درصد فراوانی‌های نسبی داده‌ها برابر ۱۰۰ است.

$$15 + 21 + x + 10 + 39 = 100 \rightarrow x = 15 \rightarrow \frac{F_3}{N} \times 100 = 15 \rightarrow \frac{F_3}{N} = \frac{15}{100}$$

درصد فراوانی نسبی دسته سوم

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i \rightarrow d_3 = \frac{F_3}{N} \times 360 = \frac{15}{100} \times 360 = 54^\circ$$

۴۲ - گزینه ۴

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i = \frac{(7 \times 2) + (9 \times 4) + (11 \times 3) + (13 \times 2) + (15 \times 5)}{2 + 4 + 3 + 2 + 5} = \frac{184}{16} = 11,5$$

۴۳ - گزینه ۱ ۲۹ داده آماری را به صورت ۱۲، ۱۳، ۲۱، ۲۲ و ۱۲، ۱۳، ۲۱، ۲۲، x_1, x_2, \dots, x_{25} نشان می‌دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\rightarrow 5 = \frac{1}{29} ((x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 + (12 - 17)^2 + (13 - 17)^2 + (21 - 17)^2 + (22 - 17)^2)$$

$$\rightarrow 5 \times 29 = (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 + 25 + 16 + 16 + 25$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 = 145 - 82$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 = 63$$

چون چهار داده حذف شده، میانگین شان 17 است $(\frac{12 + 13 + 21 + 22}{4} = \frac{68}{4} = 17)$ بنابراین پس از حذفشان دوباره میانگین همان 17 است. اکنون واریانس 25 داده باقی مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} \left((x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 \right) = \frac{1}{25} (63) = \frac{63}{25} = 2,52$$

گزینه ۲ - ۴۴

ابتدا مرکز دسته‌ها را به دست می‌آوریم، سپس مرکز هر دسته را در فراوانی آن دسته ضرب کرده و مجموع تمام مقادیر به دست آمده را بر مجموع فراوانی‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{11 \times 5 + 13 \times 10 + 15 \times 15 + 17 \times 20 + 19 \times 10}{60} \approx 15,7$$

گزینه ۲ - ۴۵

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 8 \rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i = 8 \times 20 = 160 \Rightarrow \bar{x}_{جدید} = \frac{160 + 29}{21} = \frac{189}{21} = 9$$

$$\delta = \sigma^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - (8)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 20 \times 69 = 1380$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{21} \left(\sum_{i=1}^{21} x_i^2 \right) - (\bar{x}_{جدید})^2 = \frac{1}{21} (1380 + 29^2) - (9)^2 = 105,76 - 81 = 24,76$$

گزینه ۱ - ۴۶

طبق رابطه فراوانی نسبی در نمودار دایره‌ای خواهیم داشت:

$$D \text{ فراوانی نسبی: } \frac{f_D}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\alpha_D}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \frac{\theta}{\theta + 3\theta + 2\theta + 4\theta} = \frac{\theta}{10\theta} = \frac{1}{10}$$

گزینه ۲ - ۴۷

$$14 = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^6 x_i = 14 \times 6 = 84$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2}{6} - (14)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 6 \times 200 = 1200$$

$$\sigma_{جدید}^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i^2}{8} - \left(\frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} \right)^2 = \frac{1200 + 12^2 + 16^2}{8} - \left(\frac{84 + 12 + 16}{8} \right)^2 = 200 - 196 = 4$$

تذکر: اگر فراوانی دسته n برابر f_i و تعداد داده‌ها برابر n باشد فراوانی نسبی این دسته از دستور

$$\frac{f_i}{n}$$

حاصل می‌شود.

گزینه ۳ - ۴۸

طبق فرض داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1 + f_2 + f_3}{n} &= \frac{19}{30} \\ \frac{f_3 + f_4 + f_5}{n} &= \frac{8}{15} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_3}{n} = \frac{35}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{n + f_3}{n} = \frac{35}{30} \Rightarrow 1 + \frac{f_3}{n} = \frac{35}{30} \Rightarrow \frac{f_3}{n} = \frac{1}{6}$$

$$\text{زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم} = \frac{f_3}{n} \times 360^\circ = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{14 + 15}{2} = 14,5$$

گزینه ۴ - از آنجا که تعداد داده‌ها 50 تا است، بنابراین میانه برابر است با میانگین داده‌های بیست و پنجم و بیست و ششم؛ یعنی میانه برابر است با 14,5

برای محاسبه میانگین ابتدا از همه داده‌ها 14 واحد کم می‌کنیم:



$x - 14$	-4	-2	0	1	2	4
	6	9	10	12	8	5

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{6(-4) + 9(-2) + 10(0) + 12(1) + 8(2) + 5(4)}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} \Rightarrow \bar{x} = 14,12$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} - \text{میانگین} = 14,5 - 14,12 = 0,38$$

۵۰ - گزینه ۴ قبل از اضافه کردن k داده، زاویه مرکزی مربوط به داده d برابر $360^\circ \times \frac{6}{24} = 90^\circ$ است و قرار است به 200° افزایش پیدا کند. فرض می‌کنیم از k داده اضافه شده، داده x به d اضافه شود، آنگاه:

$$\frac{6+x}{24+k} = \frac{200}{360} \Rightarrow 120 + 5k = 54 + 9x \Rightarrow 9x = 5k + 66$$

حال گزینه‌ها را انتخاب می‌کنیم:

اگر $k = 12$ آنگاه $x = 14$ که تناقض است، چون $k \leq x$.

اگر $k = 18$ آنگاه $x = \frac{52}{3}$ که تناقض است.

اگر $k = 24$ آنگاه $x = \frac{62}{3}$ که تناقض است.

اگر $k = 30$ آنگاه $x = 24$ که قابل قبول است.

۵۱ - گزینه ۴ معلوم می‌شود که آن ۱۲ داده به شکل زیر هستند:

$$4, 4, 4, 4, a, b, c, d, 8, 8, 8, 8,$$

و در ضمن $b + c$ باید برابر ۱۲ باشد:

$$(b, c) = (4, 8)$$

$$\Rightarrow a = 4, d = 8 \quad (\text{حالت ۱})$$

$$(b, c) = (5, 7)$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ یا } 5 \text{ و } d = 7 \text{ یا } 8 \quad (\text{حالت ۴})$$

$$(b, c) = (6, 6)$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \text{ و } d = 6 \text{ یا } 7 \text{ یا } 8 \quad (\text{حالت ۹})$$

۵۲ - گزینه ۲

$$\text{میانگین محیط مثلث‌ها} = \frac{3a + 3a + 3b + 3b}{4} = \frac{3}{2}(a+b) = 18 \Rightarrow a+b = 12 \quad (1)$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

$$\text{میانگین مساحت مثلث‌ها} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}(a^2 + b^2) = 10\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 = 80 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 80 \xrightarrow{(1)} ab = 32$$

بنابراین a و b ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 12x + 32 = 0$ هستند. داریم:

$$x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x-8)(x-4) = 0 \xrightarrow{a>b} \begin{cases} a=8 \\ b=4 \end{cases}$$

۵۳ - گزینه ۴

ضریب تغییرات را در دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_x = 2\sigma_1, \bar{x}_x = 2\bar{x}_1 + 3 = 27$$

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sigma_1}{12}$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}_x} = \frac{2\sigma_1}{27} = \frac{2 \times 12}{27} \times \frac{\sigma_1}{12} = \frac{8}{9} CV_1$$

۵۴ - گزینه ۱

میانگین جدید را ابتدا محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}_y = 3 + 9 = 12, \sigma_y = \sigma_1 = 1,2$$

$$CV_y = \frac{1,2}{12} = 0,1$$

۵۵ - گزینه ۳ نکته: اگر داده‌های آماری را در k ضرب کنیم واریانس k^2 برابر می‌شود و اگر به داده‌های آماری مقداری ثابت را اضافه کنیم، واریانس بدون تغییر باقی می‌ماند.

داده‌های $3! + 3,5x_1 + 3!, \dots, 3,5x_n + 3!$ با توجه به داده‌های اولیه، $3,5$ برابر شده‌اند و به آنها $3!$ واحد اضافه شده است در نتیجه واریانس $12,25\sigma^2$ برابر می‌شود. $(9\sigma^2)$ داده‌های $3x_1 - 7, 3x_2 - 7, \dots, 3x_n - 7$ با توجه به داده‌های اولیه، 3 برابر شده‌اند و از آنها 7 واحد کم شده است، در نتیجه واریانس 9 برابر می‌شود. $(9\sigma^2)$

$$\Rightarrow 12,25\sigma^2 + 9\sigma^2 = 21,25\sigma^2$$

۵۶ - گزینه ۳ وقتی همه داده‌ها به ترتیب مشخص هستند، اگر همه آنها را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم، داده وسط (در صورتی که تعدادشان فرد باشد) یا میانگین دو داده وسط (در صورتی که تعدادشان زوج باشد) لزوماً در موقعیت خود باقی می‌ماند. اما سایر داده‌ها بسته به اینکه عددی که ضرب یا تقسیم کرده‌ایم مثبت است یا منفی (و مخالف صفر)، ممکن است ترتیبشان تغییر کند. اگر مثبت باشد تغییری نمی‌کنند و اگر منفی باشد ترتیبشان وارونه می‌شود.

اما به هر حال میانه جدید در همان موقعیت میانه قبلی قرار می‌گیرد. پس میانه داده‌های جدید برابر همان میانه قبلی تقسیم بر خودش است؛ یعنی ۱.

۵۷ - گزینه ۱

$$\bar{x} = 1 - (2 \times 5) = -9$$

$$\sigma^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow \sigma = 6$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \approx -0,67$$

$$\bar{x} = \frac{17 + 15 + 12 + 17 + 19}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

۵۸ - گزینه ۱ در ابتدا میانگین داده‌های $17, 15, 12, 17, 19$ را می‌یابیم: 16 هرچقدر عدد حذف شده تا میانگین فوق فاصله بیشتری داشته باشد، مقدار میانگین بیشتر تغییر می‌کند، پس عدد حذف شده 12 است، بنابراین داده‌های جدید به صورت $17, 15, 17, 19$ می‌باشند که بعد از مرتب کردن آنها به صورت $15, 17, 17, 19$ هستند که در این داده‌ها میانگین و میانه و مد به صورت زیر است:

$$a = \frac{15 + 17 + 17 + 19}{4} = \frac{68}{4} = 17 \Rightarrow a + b + c = 3 \times 17 = 51$$

$$b = \frac{17 + 17}{2} = \frac{34}{2} = 17, c = 17$$

۵۹ - گزینه ۲

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حد پایین فاصله اطمینان ۹۵ درصدی: a

حد بالای فاصله اطمینان ۹۵ درصدی: b

برآورد میانگین: \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2} \Rightarrow 43 = \frac{a + 51}{2} \Rightarrow a = 86 - 51 = 35$$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{b - a}{2} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{b - a}{4} = \frac{51 - 35}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

۶۰ - گزینه ۳

ابتدا میانگین جامعه را حساب می‌کنیم:

$$\mu = \frac{1 + 2 + \dots + 49}{49} = \frac{49 \times 50}{2 \times 49} = 25$$

نمونه دوتایی به فرم $\{a, b\}$ را در نظر بگیریم اگر میانگین این نمونه دوتایی بخواید برابر 25 باشد باید $a + b = 50$ باشد یعنی داریم:

$$\{a, b\} : \{1, 49\}, \{2, 48\}, \{3, 47\}, \dots, \{24, 26\} \Rightarrow \text{تعداد} = 24$$

بنابراین احتمال آنکه میانگین جامعه و نمونه برابر باشد آن است که:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{24}{\binom{49}{2}} = \frac{24}{\frac{49 \times 48}{2}} = \frac{1}{49}$$

۶۱ - گزینه ۴ در نمونه گیری تصادفی شانس انتخاب برای همه اعضای جامعه برابر است. بنابراین گزینه ۴ درست است.

۶۲ - گزینه ۳

میانگین اعضای این جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8}{6} = 5$$

تعداد نمونه‌های دو عضوی این جامعه برابر $\binom{6}{2} = 15$ است که نمونه $\{3, 7\}$ تنها نمونه دو عضوی با میانگین 5 است. تعداد نمونه‌های سه عضوی این جامعه برابر $\binom{6}{3} = 20$ است که

نمونه‌های $\{3, 5, 7\}$ و $\{1, 6, 8\}$ نمونه‌های سه عضوی با میانگین 5 هستند. بنابراین اگر پیشامدهای برابری میانگین نمونه و جامعه در نمونه‌های دو عضوی و سه عضوی این جامعه را به ترتیب با A

و B نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{20}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

۶۳ - گزینه ۳ در یک نمونه تصادفی به اندازه n ، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت زیر است:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

در رابطه فوق σ انحراف معیار جامعه و \bar{x} میانگین نمونه است. در نتیجه داریم:

$$160 - \frac{2(5)}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 160 + \frac{2(5)}{\sqrt{25}} \Rightarrow 158 \leq \mu \leq 162$$

۶۴ - گزینه ۲ تمام گزینه‌ها از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی هستند. گزینه ۲ یکی از منابع اطلاعات هنگام جمع‌آوری داده‌ها است. دادگان شامل اطلاعات ذخیره شده است.

۶۵ - گزینه ۳ روشی که او برای نمونه‌گیری انتخاب کرده است نادرست است زیرا واحدهای آماری موردنظر در این تست کلاس‌ها هستند و نه دانش‌آموزان. بدیهی است که احتمال حضور هر

کلاس متناسب با تعداد اعضای آن است و مثلاً احتمال حضور یک کلاس ۳۰ نفری $\frac{30}{27}$ برابر احتمال حضور یک کلاس ۲۷ نفره است. چون هر ۳۰ نفر دانش‌آموزان کلاس می‌گویند که در کلاس

۳۰ نفری هستند ولی باید آن‌ها را فقط یک کلاس دید و این یعنی شرایط نمونه‌گیری ساده برقرار نیست و نمونه اریب است. و چون فرد از دانش‌آموزان پرسیده کار او ایراد دارد. $\frac{1}{3}$ کلاس‌ها ۳۰

نفری هستند و جواب واقعی نیز همین است. از طرفی $\frac{7}{20}$ دانش‌آموزان در کلاس‌های ۳۰ نفری حضور دارند که جواب همان سوالی است که فرد پرسیده.

$$0,35 - \frac{1}{3} = 0,01667 \approx 0,02$$

۶۶ - گزینه ۴

$$p = \frac{3!}{6^3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

(نمونه، با جایگذاری است و ۳ حرف، ۳! جایگشت دارند)

$$q = \frac{1}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}$$

(می‌خواهیم از بین ۲۰ نمونه تصادفی یکی انتخاب شود)

$$|p - q| = \left| \frac{1}{36} - \frac{1}{20} \right| = \left| \frac{5 - 9}{180} \right| = \frac{4}{180} = \frac{1}{45}$$

۶۷ - گزینه ۳ در مخرج باید ۳ گروه را از بین ۵ گروه انتخاب کنیم.

برای اینکه A_1 ، A_2 و C_1 انتخاب شوند باید خوشه‌های A و C انتخاب شوند. و چون در آن خوشه‌ها سرشماری می‌شود خود به خود A_1 ، A_2 و C_1 نیز انتخاب می‌شوند.

در صورت A و C که باید باشند پس باید ۱ گروه دیگر از بین ۳ گروه باقی‌مانده غیر از A و C انتخاب شود:

$$\frac{\binom{5-2}{3-2}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$$

۶۸ - گزینه ۲ اگر σ انحراف معیار جامعه و \bar{x} به ترتیب میانگین و اندازه نمونه انتخابی از جامعه باشد، آنگاه بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت

است. بنابراین طول بازه اطمینان ۹۵ درصد برابر $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{4\sigma}{\sqrt{n_1}}}{\frac{4\sigma}{\sqrt{n_2}}} = \frac{13,8 - 12,2}{13,2 - 12} \Rightarrow \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}} = \frac{0,6}{1,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = 4$$

۶۹ - گزینه ۴ از آنجایی که از هر طبقه نمونه تصادفی ساده می‌گیریم، احتمال انتخاب واحدهای آماری درون یک طبقه خاص با هم برابر است. البته باید توجه داشت که اگر در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه متناسب با تعداد اعضای آن طبقه، نمونه بگیریم، احتمال انتخاب تمام واحدهای آماری با هم برابر می‌شود.

در نتیجه گزینه ۱، درست است. گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نیز طبق تعریف درست هستند، گزینه ۴ نادرست است. مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند نه مجموعه کل متغیرهای آماری.

۷۰ - گزینه ۱ اگر احتمال ستون کوچک را با p نشان دهیم، احتمال ستون متوسط $2p$ و بزرگ $3p$ است، از آنجایی که مجموع همه احتمال‌ها ۱ است، داریم:

$$p + p + 2p + 2p + 3p + 3p + 2p + 2p + p + p \Rightarrow 21p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{21} \Rightarrow 3p = \frac{1}{7}$$

۷۱ - گزینه ۲

\bar{x} و μ به ترتیب میانگین جامعه و میانگین نمونه هستند. داریم:



$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow -\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{x} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\mu - \bar{x}| \leq \frac{2(2,25)}{\sqrt{36}} \Rightarrow |\mu - \bar{x}| \leq \frac{4,5}{6} \Rightarrow |\mu - \bar{x}| \leq 0,75$$

۷۲ - گزینه ۲ مجموع اعضای جامعه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{143} + \frac{1}{168} = \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{12 \times 14} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{11 \times 13} + \frac{2}{12 \times 14} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{364 + 273 - 84 - 78}{1092} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{475}{1092} \right) = \frac{475}{2184} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{475}{10} = \frac{95}{4368} \approx 0,02 \end{aligned}$$

۷۳ - گزینه ۴ گزینه ۱: از آنجایی که بانک جدید است، اطلاعات ذخیره شده وجود ندارد و نمی‌توان از دادگان استفاده کرد. در این مورد بهتر است از پرسش‌نامه استفاده شود، (البته از مصاحبه نیز می‌توان استفاده کرد، ولی پرسش‌نامه در وقت و هزینه صرفه‌جویی می‌کند).

گزینه ۲: ممکن است به علت برخی شرایط مردم خودرویی را سوار شوند که رنگ آن را خیلی نمی‌پسندند و بهتر است از پرسش‌نامه استفاده شود.

گزینه ۳: اگر از مصاحبه استفاده شود، ممکن است دانش‌آموزان پاسخ واقعی ندهند و بهتر است از پرسش‌نامه استفاده شود و از نظر زمان و هزینه بهتر است.

گزینه ۴: صحیح است. زیرا می‌توان از اطلاعاتی که دانش‌آموزان هنگام ثبت‌نام پر کرده‌اند، استفاده کرد.

۷۴ - گزینه ۲

با توجه به فرض داریم:

$$\sigma < 18\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \sigma < 18 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} < 18 \Rightarrow n < 18^2 \Rightarrow n < 324$$

$$n \text{ حداقل مقدار} = 323$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۱۲ - ۳	۲۳ - ۱	۳۴ - ۴	۴۵ - ۲	۵۶ - ۳	۶۷ - ۳
۲ - ۴	۱۳ - ۲	۲۴ - ۲	۳۵ - ۱	۴۶ - ۱	۵۷ - ۱	۶۸ - ۲
۳ - ۳	۱۴ - ۳	۲۵ - ۳	۳۶ - ۴	۴۷ - ۲	۵۸ - ۱	۶۹ - ۴
۴ - ۲	۱۵ - ۲	۲۶ - ۳	۳۷ - ۳	۴۸ - ۳	۵۹ - ۲	۷۰ - ۱
۵ - ۱	۱۶ - ۲	۲۷ - ۳	۳۸ - ۳	۴۹ - ۴	۶۰ - ۳	۷۱ - ۲
۶ - ۴	۱۷ - ۱	۲۸ - ۱	۳۹ - ۱	۵۰ - ۴	۶۱ - ۴	۷۲ - ۲
۷ - ۲	۱۸ - ۴	۲۹ - ۳	۴۰ - ۳	۵۱ - ۴	۶۲ - ۳	۷۳ - ۴
۸ - ۳	۱۹ - ۱	۳۰ - ۳	۴۱ - ۴	۵۲ - ۲	۶۳ - ۳	۷۴ - ۲
۹ - ۴	۲۰ - ۱	۳۱ - ۴	۴۲ - ۴	۵۳ - ۴	۶۴ - ۲	
۱۰ - ۳	۲۱ - ۴	۳۲ - ۱	۴۳ - ۱	۵۴ - ۱	۶۵ - ۳	
۱۱ - ۲	۲۲ - ۱	۳۳ - ۳	۴۴ - ۲	۵۵ - ۳	۶۶ - ۴	