



۱- اگر $m > 1$ باشد، آنگاه $(m^2, m^4) \cap (m^3, m^6)$ کدام است؟

- ① (m^3, m^2) ② (m^2, m^3) ③ (m, m^2) ④ (m, m^3)

۲- فرض کنید B, C و A مجموعه‌های اعدادی هستند که $\{A, B, C\} = \{W, Z, Q'\}$. اگر $A \cap B = \emptyset$ و $C - A = \emptyset$ باشد، حاصل $A - (B \cup C)$ کدام است؟

- ① $\{\dots, -2, -1\}$ ② \emptyset ③ Q' ④ $\{\dots, -2, -1, 0\}$

۳- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام عبارت صحیح نیست؟

- ① اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است. ② اگر $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه B حتماً متناهی است.
 ③ اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $A \cup B$ حتماً نامتناهی است. ④ اگر $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه $A - B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴- اگر A مجموعه‌ای اعداد اول بزرگ‌تر از 10^{1396} و B مجموعه‌ای اعداد زوج بزرگ‌تر از 10^{1396} باشد، کدام گزینه نادرست است؟

① $A \cap B$ متناهی است. ② $A - B$ نامتناهی است. ③ $B - A$ نامتناهی است. ④ $A \cup B$ متناهی است.

۵- کدام مجموعه زیر متناهی نیست؟

- ① مجموعه‌ی اعداد اول زوج ② مجموعه‌ی گره‌های کره زمین
 ③ مجموعه‌ی تمام خطوط گذرنده از مبدأ مختصات ④ مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴

۶- در یک کلاس ۳۵ نفری ۱۰ نفر فقط یکی از دو امتحان فیزیک و شیمی را تجدید شده‌اند. اگر ۲۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس هیچ یک از این دو امتحان را تجدید نشده باشند، چند نفر در این کلاس هر دو امتحان فیزیک و شیمی را تجدید شده‌اند؟

- ① صفر ② ۵ ③ ۱۰ ④ ۱۵

۷- اگر $n(A) = 22$ و $n(B - A) = 22$ باشد، آن‌گاه تعداد اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B قرار دارند، کدام است؟

- ① ۱۵۰ ② ۱۵۲ ③ ۱۵۴ ④ ۱۵۶

۸- در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۵ نفر در تیم والیبال، ۱۲ نفر در تیم فوتبال و ۵ نفر در هر دو تیم حضور دارند. چند نفر از این کلاس در هیچ یک از دو تیم حضور ندارند؟

- ① ۹ ② ۸ ③ ۷ ④ ۵

۹- فرض کنید $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7\}$ مجموعه مرجع باشد. اگر $A \cap B' = \{2\}$ و $A \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ باشد، مجموعه A چند عضو دارد؟

- ① ۱ ② ۴ ③ ۵ ④ نمی‌توان مشخص کرد.

۱۰- در یک کلاس ۷۵ نفری، تعداد کسانی که ورزشکار هستند، دو برابر تعداد کسانی است که فقط یکی از دو رشته فوتبال یا والیبال را انجام می‌دهند و تعداد فوتبالیست‌ها ۵ برابر تعداد کسانی است که فقط والیبال بازی می‌کنند. اگر ۱۵ نفر هیچ ورزشی انجام ندهند، چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

- ① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۳۰ ④ ۴۰

۱۱- در یک الگوی خطی با جملات متمایز، حاصل کدام عبارت برابر جمله سیزدهم نیست؟

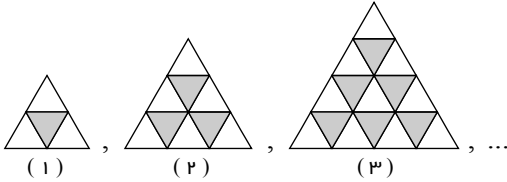
(۴) $\frac{5a_8 + a_{38}}{6}$

(۳) $\frac{5a_{20} - a_{24}}{4}$

(۲) $\frac{a_8 + a_{18}}{2}$

(۱) $5a_5 - 4a_3$

۱۲- با توجه به الگوی زیر، در مرحله ۹۸ام تعداد مثلث‌های تیره چند برابر تعداد مثلث‌های سفید است؟



(۲) $\frac{99}{100}$

(۱) $\frac{98}{100}$

(۴) $\frac{100}{101}$

(۳) $\frac{100}{102}$

۱۳- اگر $a_n = \frac{7n+1}{n+1}$ و $b_n = \frac{n}{n+1}$ ، آنگاه دنباله $b(a_n)$ چند جمله دارد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) هیچ

۱۴- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله در دنباله $\{2 + \frac{(-1)^n}{n+1}\}$ کدام است؟

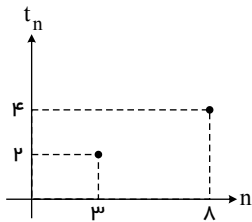
(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{6}$

۱۵- شکل مقابل، بخشی از نمودار الگوی خطی $t_n = (2k - 10)n^2 + an + b$ را نمایش می‌دهد. جمله k ام این دنباله کدام است؟



(۱) ۲, ۸

(۲) ۳, ۱

(۳) ۲, ۹

(۴) ۲, ۵

۱۶- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، نسبت جمله هفتم به جمله پنجم برابر ۲۷ است. اگر حاصل ضرب جمله‌های اول و دوم ۱۲ باشد، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

(۴) ۸۱

(۳) ۱۶۲

(۲) ۲۷

(۱) ۵۴

۱۷- بین دو عدد ۳ و ۹۶ چهار واسطه هندسی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌های اول و سوم کدام است؟ (عدد ۳، جمله اول است.)

(۴) ۳۰

(۳) ۴۲

(۲) ۳۶

(۱) ۱۸

۱۸- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۳- و مجموع سه جمله بعدی ۲۴ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟

(۴) ۶۷

(۳) ۶۵

(۲) ۵۶

(۱) ۷۶

۱۹- جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله هندسی، کدام است؟

(۴) $\frac{9}{4}$

(۳) ۲

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{4}{3}$

۲۰- با توجه به الگوی $\dots, 14, 9, 5, 2$ ، مجموع جملات دهم و دوازدهم کدام است؟

(۴) ۱۶۵

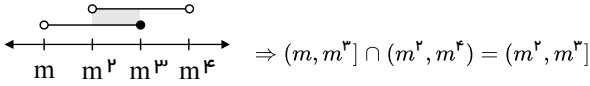
(۳) ۱۵۹

(۲) ۱۵۵

(۱) ۱۵۱

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ اعداد بزرگ‌تر از ۱ هرچه به توان بزرگتری برسند، بزرگ‌تر می‌شوند یعنی: $m < m^2 < m^3 < m^4$



۲ - گزینه ۱

$$\left. \begin{matrix} C - A = \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C = \mathbb{W} \\ A = \mathbb{Z} \\ B = Q' \end{cases}$$

پس:

$$A - (B \cup C) = \mathbb{Z} - (Q' \cup \mathbb{W}) = \{\dots, -2, -1\}$$

۳ - گزینه ۲ اگر $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: مجموعه‌ی متناهی، مجموعه‌ایست که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد.

مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد اول، هر دو نامتناهی هستند و تنها عدد زوج اول ۲ است که نه در A وجود دارد و نه در B پس دو مجموعه‌ی A و B هیچ اشتراکی ندارند، بنابراین:

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{متناهی} \quad A - B = A \quad \text{نامتناهی}$$

$$B - A = B \quad \text{نامتناهی}$$

تنها گزینه‌ی نادرست، گزینه‌ی ۴ است.

۵ - گزینه ۳ (تنها عدد اول زوج ۲ است. پس مجموعه اعداد اول زوج تک عضوی و متناهی است.

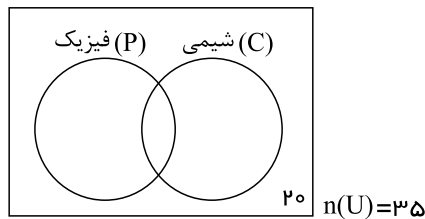
(۲) تعداد گره‌های روی کره زمین عدد حسابی است (هر چند که ما آن را ندانیم). پس مجموعه گره‌ها متناهی است.

(۳) از هر نقطه بیشمار خط راست می‌گذرد، پس مجموعه خطوط گذرنده از مبدأ مختصات نامتناهی است.

(۴) مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴ عبارتست از $\{100, 104, 108, \dots, 996\}$; پس متناهی است.

۶ - گزینه ۲

با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(U) = 35$$

$$n(P \cup C) = 35 - 20 = 15$$

$$n(P - C) + n(C - P) = 10 \Rightarrow n(P) - n(P \cap C) + n(C) - n(P \cap C) = n(P) + n(C) - 2n(P \cap C) = 10 + n(P \cap C) \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$n(P \cup C) = n(P) + n(C) - n(P \cap C)$$

$$\Rightarrow 15 = 10 + n(P \cap C) \Rightarrow n(P \cap C) = 5$$

گزینه ۳ - ۷

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = \frac{4}{3}n(A \cap B) - n(A \cap B) = \frac{1}{3}n(A \cap B) = 22$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 66$$

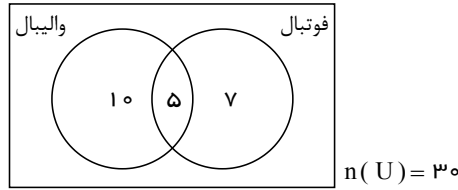
$$n(A) = 2n(A \cap B) = 132$$

$$n(B) = \frac{4}{3}n(A \cap B) = \frac{4}{3} \times 66 = 88$$

$n(A \cup B)$ = تعداد اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B قرار دارند

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 132 + 88 - 66 = 154$$

با توجه به نمودار ون داریم:



$$30 - (10 + 5 + 7) = 8$$

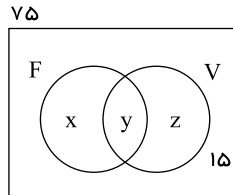
۹ - گزینه ۴ مجموعه A حتماً شامل ۲ عدد است و قطعاً ۵ عضوی از این مجموعه نیست. راجع به عضویت اعداد ۱، ۳، ۴، ۶ و ۷ در A نظر قطعی نمی‌توان داد.

۱۰ - گزینه ۲ در این گونه سؤالات استفاده از نمودار ون بهتر است.

x: تعداد کسانی که فقط فوتبال بازی می‌کنند.

y: تعداد کسانی که هر دو رشته را بازی می‌کنند.

z: تعداد کسانی که فقط والیبال بازی می‌کنند.



$$\begin{cases} \underbrace{x + y + z}_{60} = 2(\underbrace{x + z}_{60 - y}) \Rightarrow 60 = 120 - 2y \Rightarrow 2y = 60 \Rightarrow y = 30 \\ \underbrace{x + y}_{60 - z} = 5z \Rightarrow 60 - z = 5z \Rightarrow z = 10 \Rightarrow x = 20 \end{cases}$$

تعداد کسانی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، ۲۰ نفر است.

۱۱ - گزینه ۳ جمله عمومی یک الگوی خطی به فرم $t_n = an + b$ است. بنابراین:

$$t_{13} = 13a + b$$

$$1) 5a_5 - 4a_4 = 5(5a + b) - 4(4a + b) = 13a + b = t_{13}$$

$$2) \frac{a_8 + a_{18}}{2} = \frac{(8a + b) + (18a + b)}{2} = \frac{26a + 2b}{2} = \frac{2(13a + b)}{2} = 13a + b = t_{13}$$

$$3) \frac{5a_{20} - a_{24}}{4} = \frac{5(20a + b) - (24a + b)}{4} = \frac{76a + 4b}{4} = 19a + b \neq t_{13}$$

$$4) \frac{5a_8 + a_{38}}{6} = \frac{5(8a + b) + (38a + b)}{6} = \frac{78a + 6b}{6} = 13a + b = t_{13}$$

۱۲ - گزینه ۱

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه	$1 = \frac{1 \times 2}{2}$	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$...	$\frac{n(n+1)}{2}$
تعداد مثلث‌های سفید	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$	$10 = \frac{4 \times 5}{2}$...	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n}{n+2}$	$\xrightarrow{n=98} \frac{98}{100}$		

۱۳ - گزینه ۳ جواب a_n باید عددی طبیعی باشد تا $b(a_n)$ معنای داشته باشد.

$$n = 1 \rightarrow a_1 = 4 \rightarrow b(a_1) = b_4 = \frac{4}{5} \qquad n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{15}{3} \rightarrow b(a_2) = \frac{5}{6}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5,5 \qquad n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{29}{5}$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = \frac{36}{6} = 6 \rightarrow b_6 = \frac{6}{7} \checkmark$$

ممکن است این پرسش در ذهنتان به وجود آید که از کجا معلوم است اگر به عدد دادن ادامه دهیم، جملات دیگری وجود نداشته باشد؟ به استدلال زیر توجه کنید:

$$a_n = \frac{7n+1}{n+1} = \frac{(7n+7)-6}{n+1} = \frac{7n+7}{n+1} - \frac{6}{n+1} = \frac{7(n+1)}{n+1} - \frac{6}{n+1} = 7 - \frac{6}{n+1} \quad (*)$$

برای آن که عبارت (*) عدد طبیعی باشد باید $n+1$ جزو مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد 6 باشد یعنی:

پس این دنباله فقط 3 جمله دارد.

$$n+1=1 \rightarrow n=0 \text{ یا } n+1=2 \rightarrow n=1 \text{ یا } n+1=3 \rightarrow n=2 \text{ یا } n+1=6 \rightarrow n=5$$

۱۴ - گزینه ۳ ابتدا چند جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \rightarrow a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{7}{3}, a_3 = \frac{7}{4}, a_4 = \frac{11}{5}, \dots$$

واضح است که اولین و دومین جمله، کم‌ترین و بیشترین مقدار را دارند.

پس:

$$\frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{14-9}{6} = \frac{5}{6}$$

۱۵ - گزینه ۱ جمله عمومی هر الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ می‌باشد، مقدار a ، اختلاف جملات متوالی یا همان شیب خطی است که جملات دنباله روی آن قرار دارند.

t_n یک الگوی خطی است، پس ضریب n^2 باید صفر باشد بنابراین:

$$2k - 10 = 0 \rightarrow k = 5$$

با توجه به شکل دنباله داریم: $t_3 = 2$ و $t_4 = 4$

$$t_n = an + b \begin{cases} t_3 = 2 = 3a + b \\ t_4 = 4 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{5}, b = \frac{4}{5} \Rightarrow t_n = \frac{2}{5}n + \frac{4}{5}$$

جمله k ام دنباله یعنی جمله پنجم آن، پس:

$$t_5 = \left(\frac{2}{5}\right)(5) + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$$

۱۶ - گزینه ۱

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^4} = r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$a_1 \times a_1 r = 12 \xrightarrow{r=3} a_1^2 \times 3 = 12 \Rightarrow a_1^2 = 4 \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت‌اند}} a_1 = 2$$

$$\Rightarrow a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \times 3^5 = 54$$

۱۷ - گزینه ۴

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، $a_n = a_1 r^{n-1}$ است.

$$a_1 = 3, a_6 = 96 \Rightarrow a_1 r^5 = 96 \Rightarrow 3 \times r^5 = 96$$

$$\Rightarrow r^5 = \frac{96}{3} = 32 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

جملات دنباله را می‌نویسیم.

$$3, \boxed{6}, \boxed{12}, \boxed{24}, \boxed{48}, 96 \Rightarrow \text{مجموع واسطه‌های اول و سوم} = 6 + 24 = 30$$

۱۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: در یک دنباله حسابی، با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، جمله عمومی دنباله از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -3 \\ a_6 + a_8 + a_{10} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = -3 \\ a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = -3 \\ 3a_1 + 12d = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = -1 \\ a_1 + 4d = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = -1 \\ 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \end{cases}$$

$$a_1 + d = -1 \Rightarrow a_1 + 3 = -1 \Rightarrow a_1 = -4$$

$$a_n = -4 + (n-1) \times 3$$

$$a_{21} = -4 + (21-1) \times 3 = -4 + 20 \times 3 = -4 + 60 = 56$$

۱۹ - گزینه ۴

روش اول: در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند $ac = b^2$ است.

$$a_3, a_7, a_{15} \rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 10d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 10d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\rightarrow a_1^2 + 15a_1d + 2a_1d + 30d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 \rightarrow d(6d - 5a_1) = 0 \rightarrow 5a_1 = 6d \rightarrow a_1 = \frac{6}{5}d$$

$$\text{جملات: } \frac{6}{5}d + 2d, \frac{6}{5}d + 6d, \frac{6}{5}d + 15d \rightarrow \frac{16}{5}d, \frac{36}{5}d, \frac{81}{5}d \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

روش دوم: اگر a_m, a_n, a_p جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می‌دهند آن‌گاه $q_{\text{هندسی}} = \frac{p-n}{n-m}$ است.

$$a_3, a_7, a_{16} \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

۲ - گزینه ۲ نکته: هرگاه در یک دنباله، اختلاف جمله‌های متوالی با یکدیگر دنباله حسابی تشکیل دهند، این دنباله یک الگوی درجه دوم به فرم $t_n = an^2 + bn + c$ می‌باشد.

نکته: اگر قدرنسبت دنباله حسابی تشکیل شده از اختلاف جمله‌ها d باشد، آن‌گاه $a = \frac{d}{2}$ می‌باشد.

$$t_1=2, t_2=5, t_3=9, t_4=14, \dots$$

دقت کنید اختلاف جمله‌های t_n که اعداد ۳، ۴، ۵، ... هستند، یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 1$ تشکیل می‌دهند پس $a = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + c \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2} + b + c = 2 \Rightarrow b + c = \frac{3}{2} \\ t_2 = 5 &\Rightarrow 2 + 2b + c = 5 \Rightarrow 2b + c = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = \frac{3}{2}, c = 0 \rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{n(n+3)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{12} = 72 + 18 = 90 \\ t_{10} = 50 + 15 = 65 \end{cases} \Rightarrow t_{12} + t_{10} = 155$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۴

۷ - ۳

۱۰ - ۲

۱۳ - ۳

۱۶ - ۱

۱۹ - ۴

۲ - ۱

۵ - ۳

۸ - ۲

۱۱ - ۳

۱۴ - ۳

۱۷ - ۴

۲۰ - ۲

۳ - ۲

۶ - ۲

۹ - ۴

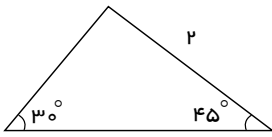
۱۲ - ۱

۱۵ - ۱

۱۸ - ۲



۱- ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث مقابل کدام است؟



۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

۲- AH ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه ABC است که در رأس \hat{A} قائمه است و HK ارتفاع مثلث AHB می‌باشد. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟

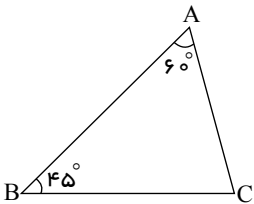
AHK, ABH (۴)

AHK, BHK (۳)

AHC, AHB (۲)

ABC, AKC (۱)

۳- در شکل زیر، اگر $AC = 10\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه اندازه ضلع BC کدام است؟



$15\sqrt{2}$ (۲)

۱۵ (۱)

۲۰ (۴)

$15\sqrt{3}$ (۳)

۴- در مثلث ABC ، $C = 75^\circ$ ، $B = 45^\circ$ ، $AB = 2$ و $AC = 2\sqrt{3} - 2$ است. مساحت مثلث چقدر است؟

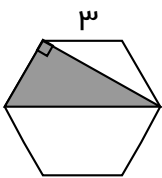
$3 + \sqrt{3}$ (۴)

$\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ (۲)

$3 - \sqrt{3}$ (۱)

۵- مساحت قسمت هاشورخورده در شش‌ضلعی منتظم مقابل چقدر است؟

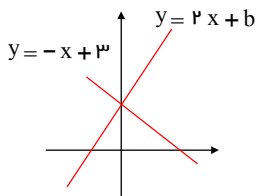


$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

$3\sqrt{3}$ (۴)

۳ (۳)



۶- در شکل زیر b کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۷- چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

(الف) در دایره مثلثاتی زوایایی وجود دارد که تانژانت و کتانژانت آنها مختلف‌العلامت باشند.

(ب) در هر دور از دایره مثلثاتی دو زاویه مثبت وجود دارد که کسینوس آنها برابر $\frac{1}{3}$ است.

(ج) در دایره مثلثاتی هرچه زاویه بزرگ‌تر باشد، مقدار سینوس آن بزرگ‌تر می‌شود.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۸- اگر برای زوایای α ، β و θ تساوی $\sin \theta = \frac{\cos \beta - 2 \sin \alpha}{5}$ برقرار باشد، $\sin \theta$ برابر با کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟

$-\frac{7}{10}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{4}{7}$ (۱)



۹- اگر $\tan \theta = 2$ و انتهای زاویه θ در ناحیه سوم محورهای مختصات واقع باشد، مجموع مؤلفه‌های اول و دوم نقطه P (محل برخورد انتهای زاویه θ با دایره مثلثاتی) کدام است؟

- ① $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

۱۰- فرض کنیم زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\sin \alpha |\cos \alpha| + |\sin \alpha \times \cos \alpha|}{|\sin \alpha| \cos \alpha}$$

- ① صفر ② ۲ ③ -۲ ④ -۱

۱۱- اگر α زاویه‌ای باشد که خط $2y + \sqrt{3}x + 1 = 0$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، آنگاه $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ کدام است؟

- ① $-\frac{3\sqrt{21}}{7}$ ② $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ ④ $-\frac{\sqrt{21}}{7}$

۱۲- اگر $\frac{3\sin^2 x + 5\cos^2 x + 3}{4\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1} = 3$ باشد، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{7}{3}$

۱۳- ساده شده عبارت $\left((\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right)$ کدام است؟

- ① $\sin^2 \alpha$ ② $\cos^2 \alpha$ ③ $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ④ $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۱۴- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

- ① $\frac{13}{27}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{17}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$

۱۵- اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۶- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (همه عبارت‌ها تعریف شده‌اند).

- ① $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ② $\sin^6 x - \sin^2 x = \cos^6 x - \cos^2 x$
- ③ $\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} \right)^2$ ④ $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$

۱۷- اگر $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ و $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 14$ باشد، مقدار $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- ① $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ② $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ③ $\sqrt{\frac{7}{2}}$ ④ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

۱۸- اگر عبارت $2(\sin^6 x + \cos^6 x) + m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ بستگی به مقدار x نداشته باشد، مقدار m و مقدار عبارت به ترتیب کدام‌اند؟

- ① -۱، -۳ ② -۱، ۲ ③ ۵، ۳ ④ ۵، ۲

۱۹- اگر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2$ و $\sin x < 0$ باشد، حاصل $\sin x \cos x$ کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۳)

$-\frac{8}{9}$ (۲)

$-\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۱)

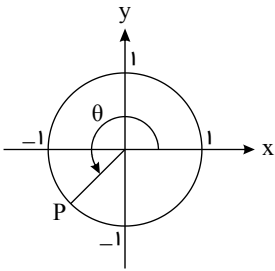
۲۰- در شکل زیر، اگر $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{3} \tan \theta - 4 \sin \theta}{\cot \theta}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

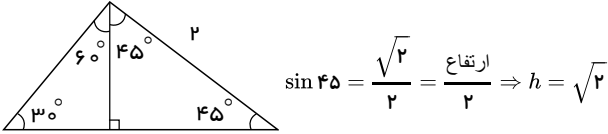
$\sqrt{3}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)



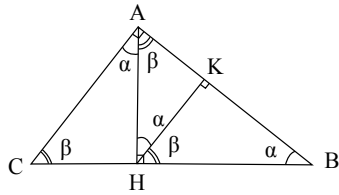
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ با رسم ارتفاع خواهیم داشت:



۲ - گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل و زوایای داخلی مثلث‌ها داریم:



$$۲) \left. \begin{array}{l} \hat{A}HB = \hat{A}HC = 90^\circ \\ \hat{A}BH = \hat{C}AH = \alpha \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHB \sim \triangle AHC$$

$$۳) \left. \begin{array}{l} \hat{K} \text{ مشترک} \\ \hat{K}AH = \hat{K}HB = \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHK \sim \triangle BHK$$

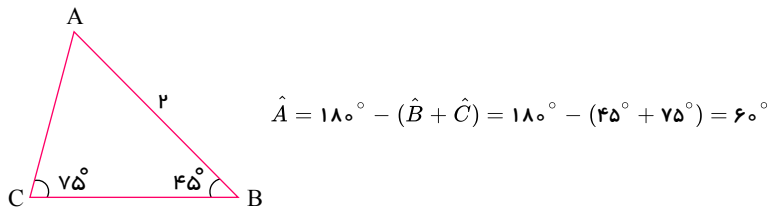
$$۴) \left. \begin{array}{l} \hat{K} = \hat{A}HB = 90^\circ \\ \hat{K}AH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHK \sim \triangle ABH$$

۳ - گزینه ۲ همان طور که می‌دانیم مساحت مثلث ABC را می‌توان از روابط زیر پیدا کرد.

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 60^\circ \\ S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 45^\circ \end{cases} \Rightarrow AC \times \sin 60^\circ = BC \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 30 = \sqrt{2}BC \Rightarrow BC = \frac{30}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 15\sqrt{2}$$

۴ - گزینه ۱ با توجه به شکل زیر:



می‌دانیم مساحت مثلث از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{3} - 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$$

۵ - گزینه ۲

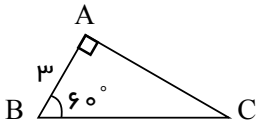
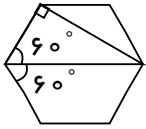
می‌دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \theta(AB, AC)$$

(زاویه بین AB, AC)

$$= (n - 2) \times 180^\circ$$

هر زاویه داخلی $120^\circ = \frac{720^\circ}{6} \Rightarrow$ مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی منتظم



$$\cos 60^\circ = \frac{3}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

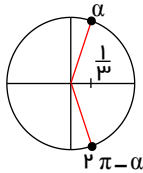
$$\left. \begin{array}{l} \nearrow y = 3 \\ x = 0 \\ \searrow y = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 3$$

۶ - گزینه ۳ مختصات محل تلاقی در هر دو معادله صدق می‌کند.

۷ - گزینه ۲ گزینه (الف) نادرست؛ می‌دانیم که تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند و دو عدد که معکوس هم باشند، هم علامتند.

گزینه (ب) درست؛ دایره را ببینید:

$\alpha, 2\pi - \alpha$ دو زاویه مثبت هستند که کسینوس آنها $\frac{1}{3}$ است.



گزینه (ج) نادرست؛ در ربع اول با افزایش زاویه، سینوس آن بزرگ‌تر می‌شود اما در ربع دوم سینوس کاهش می‌یابد و همین امر گزینه را رد می‌کند.

۸ - گزینه ۴

$$\boxed{-1 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1}$$

برای هر زاویه α و β می‌دانیم:

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1 \quad (I)$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \sin \alpha \leq 2 \quad (II)$$

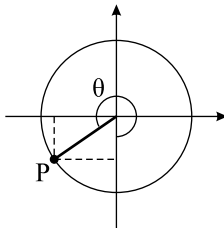
$$\xrightarrow{(I)+(II)} -3 \leq \cos \beta - 2 \sin \alpha \leq 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{5}} -\frac{3}{5} \leq \underbrace{\frac{\cos \beta - 2 \sin \alpha}{5}}_{\sin \theta} \leq \frac{3}{5}$$

$$-\frac{3}{5} \leq \sin \theta \leq \frac{3}{5}$$

با توجه به حدود بدست آمده برای $\sin \theta$ نمی‌تواند $-\frac{7}{10}$ باشد.

۹ - گزینه ۱

شکل مقابل را برای مسئله رسم می‌کنیم:



نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی با مختصات به فرم $\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$ است.

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \Rightarrow \sin \theta = 2 \cos \theta \quad (*) \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{از طرفی} \end{array} \right\} \rightarrow 4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow P \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

۱۰ - گزینه ۳

زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد یعنی $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$

پس:

$$|\sin \alpha \cos \alpha| = -\sin \alpha \cos \alpha \quad \text{و} \quad |\cos \alpha| = -\cos \alpha \quad \text{و} \quad |\sin \alpha| = \sin \alpha$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin \alpha |\cos \alpha| + |\sin \alpha| \cos \alpha}{|\sin \alpha| \cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \times \cos \alpha} = \frac{-2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -2$$

۱۱ - گزینه ۴ شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد. بنابراین:

$$2y + \sqrt{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -\sqrt{3}x - 1 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{چون } \tan \alpha \text{ منفی است، پس } 90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$\xrightarrow{90^\circ < \alpha < 180^\circ} \cos \alpha = -\sqrt{\frac{4}{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{-2\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} - \frac{2\sqrt{21}}{7} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$$

۱۲ - گزینه ۱

$$\frac{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x + 3}{4 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 1} = 3 \rightarrow 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x + 3 = 12 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 3$$

$$\rightarrow 9 \sin^2 x = 7 \cos^2 x \rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{7}{9} = \tan^2 x$$

۱۳ - گزینه ۴

$$\left(\tan^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right) = (\tan^2 \alpha - 1) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right) = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right)$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-8}{9} \rightarrow \sin x \cos x = \frac{-4}{9}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{-4}{9} \right) \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

۱۵ - گزینه ۴

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \sin x < 0 \rightarrow \sin x = -\frac{2}{3}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۶ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ: } \frac{\sin x}{1 + \cos x} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} : \text{طرف راست} \end{aligned}$$

گزینه ۲:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ: } \sin^2 x - \sin^2 x &= (1 - \cos^2 x)^2 - (1 - \cos^2 x) \\ &= (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) - (1 - \cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x : \text{طرف راست} \end{aligned}$$

گزینه ۳:

$$\text{طرف چپ: } \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\text{طرف راست: } \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

گزینه ۴:

$$\text{طرف چپ: } \tan^2 x + \cot^2 x = (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) - 2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

مخالف طرف راست

۱۷ - گزینه ۱

$$\text{سؤال: } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 14 \xrightarrow{+2} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \times 1 = 16$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha \cot \alpha = 1} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 16$$

$$\Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm 4 \xrightarrow{\substack{\alpha \text{ در ناحیه دوم است پس } \tan \alpha \\ \text{و } \cot \alpha \text{ هر دو منفی هستند.}}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = -4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -4$$

می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ است پس:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -4 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -4 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = \sin \alpha - \cos \alpha \xrightarrow{\text{به توان } 2} A^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \stackrel{(1)}{=} 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

چون در ناحیه دوم $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$ منفی است، پس $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است، یعنی $A = \sqrt{\frac{3}{2}}$ قابل قبول است.

۱۸ - گزینه ۱ چشم‌انداز: از $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم.
پله یکم:

$$2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) + m(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = 2 + m + (-6 - 2m) \sin^2 x \cos^2 x$$

پله دوم: برای اینکه عبارت مستقل از x باشد باید $-6 - 2m = 0$ در نتیجه $m = -3$.

پله سوم: حاصل عبارت $m + 2$ است که به‌ازای $m = -3$ مقدار آن -1 می‌شود.

۱۹ - گزینه ۳

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2 \Rightarrow 1 - \cos x = 2 + 2 \cos x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{3} \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

x در ناحیه سوم می‌تواند قرار بگیرد.

می‌دانیم: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$

$$\Rightarrow \sin x \times \cos x = \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{8}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

۲۰ - گزینه ۴

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{ربع سوم } \theta} \sin \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \sqrt{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} \tan \theta - 4 \sin \theta}{\cot \theta} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{1 + 2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۱

۷ - ۲

۱۰ - ۳

۱۳ - ۴

۱۶ - ۴

۱۹ - ۳

۲ - ۱

۵ - ۲

۸ - ۴

۱۱ - ۴

۱۴ - ۱

۱۷ - ۱

۲۰ - ۴

۳ - ۲

۶ - ۳

۹ - ۱

۱۲ - ۱

۱۵ - ۴

۱۸ - ۱



۱- اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = |a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- ① $2\sqrt[3]{a}$ ② $\sqrt{a} - a$ ③ $a - \sqrt{a}$ ④ $2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$

۲- اگر $a = \left(\frac{1}{0.7}\right)^{\frac{2}{3}}$ و $b = \left(\frac{1}{0.7}\right)^{\frac{3}{4}}$ و $c = \left(\frac{1}{0.7}\right)^{\frac{4}{5}}$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

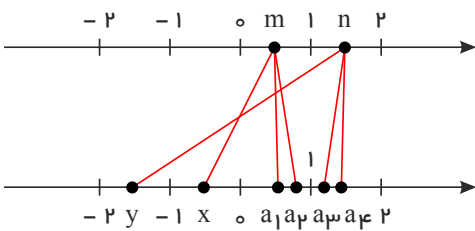
- ① $a > b > c$ ② $c > b > a$ ③ $b > c > a$ ④ $c > a > b$

۳- اگر $a^2 > a^3$ و $b^3 > b^5$ باشند، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

- الف) $a^2 < 1$ ب) $b^4 < b^2$ ج) $ab < 1$ د) $a + b < 1$

- ① صفر ② یک ③ دو ④ سه

۴- در شکل زیر دو نقطه از محور بالا را به ریشه‌های دوم و سوم هر کدام از نقاط وصل می‌کنیم. مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- ① $-a_3, -a_4$

- ② $-a_4, -a_3$

- ③ $-a_3, -a_1$

- ④ $-a_4, -a_1$

۵- تساوی $\sqrt{\frac{ac^2}{b^2}} = \frac{-c^2}{b} \sqrt{a}$ در کدام یک از حالات زیر صحیح است؟

- ① $b < 0, a \geq 0$ ② $b > 0, a \geq 0$ ③ $b \geq 0, a \geq 0$ ④ $ab \geq 0$

۶- حاصل عبارت $n+1 \sqrt{\frac{3^{n+2}}{n+1 \sqrt{3^{n+1}} \sqrt{9^n}}}$ کدام است؟ $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

- ① ۳ ② $\sqrt[3]{3}$ ③ $n+1 \sqrt{3}$ ④ $3^{n+1} \sqrt{3}$

۷- اگر $\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 0.0016$ باشد، آنگاه حاصل $\sqrt{5x}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{5}$ ② ۱۰ ③ $2\sqrt{5}$ ④ ۵

۸- اگر $A = \left(\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[5]{256}} + \frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[3]{16}}\right)^4$ باشد، حاصل A^{60} کدام است؟

- ① 2^{128} ② 2^{64} ③ 2^{32} ④ 2^{16}

۹- اگر اعداد ۲- و a ریشه‌های چهارم عدد b باشند، حاصل $a^3 - b$ کدام است؟

- ① ۸ ② -۸ ③ ۲۴ ④ -۲۴



۱۰- اختلاف ریشه‌های چهارم عدد ۴ برابر a است. اگر $\sqrt[3]{16} \times a^{\frac{4}{9}} = 2^x$ باشد، مقدار x کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۱- اگر $x^{\frac{a}{5}} = 2$ باشد، ریشهٔ دهم x کدام است؟ ($x > 0$ و a عددی گویا و مثبت است.)

- ① فقط $\frac{a}{50}$ ② فقط $\frac{a}{5}$ ③ $\pm 2^{\frac{a}{5}}$ ④ $\pm 2^{\frac{a}{50}}$

۱۲- اگر $\sqrt{72} = \frac{\sqrt{288a^2b^4}}{a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

- ① $-\sqrt{2}$ ② صفر ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- اگر $6^{x+1} = \sqrt[3]{2^{y+2}} \times \sqrt[3]{3^{x+5}}$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۱۴- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[5]{-128}} + \frac{3\sqrt{-27}}{4\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}} + \sqrt[3]{64}$ کدام است؟

- ① -۲ ② ۲ ③ -۳ ④ ۶

۱۵- حاصل عبارت زیر کدام است؟ ($a, b \neq 0$)

$$\frac{2a^2}{\sqrt[5]{b^4}} \times a^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{a^{-2}})^4 \times \frac{\sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[4]{a^{12}}} \times \sqrt[5]{a^{-15}} \times 3a^4 \times \sqrt{a^2b}$$

- ① $\frac{6\sqrt[3]{a^2}}{a}$ ② $6a^2$ ③ $6a^2\sqrt{a}$ ④ $6a^3$

۱۶- مقدار S از رابطه $S = \left(1 + 2^{\frac{-1}{33}}\right) \left(1 + 2^{\frac{-1}{16}}\right) \left(1 + 2^{\frac{-1}{8}}\right) \left(1 + 2^{\frac{-1}{6}}\right) \left(1 + 2^{\frac{-1}{4}}\right)$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2} \left(1 - 2^{\frac{-1}{33}}\right)^{-1}$ ② $\left(1 - 2^{\frac{-1}{33}}\right)^{-1}$ ③ $1 - 2^{\frac{-1}{33}}$ ④ $\frac{1}{2} \left(1 - 2^{\frac{-1}{33}}\right)$

۱۷- اگر $2 = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^2 - 1}{x}$ کدام است؟

- ① ۶ ② ۲ ③ ۱۴ ④ ۱۲

۱۸- ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$ کدام است؟ (مخرج کسرها مخالف صفر است.)

- ① $\frac{1}{x+1}$ ② $\frac{1}{x-1}$ ③ $\frac{x+1}{x-1}$ ④ $\frac{x-1}{x+1}$

۱۹- اگر $a + b + c = -1$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ باشد، حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ① ۷ ② ۸ ③ ۹ ④ ۴



۲۰- اگر $a + b - c = 2$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(2c + ab - 2) \quad \text{Ⓐ}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(2c + 2 - ab) \quad \text{Ⓑ}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(2c + 2 - ab) \quad \text{Ⓐ}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(2c + ab - 2) \quad \text{Ⓑ}$$



۱- به ازای چه مقادیر طبیعی از k ، ریشه‌های معادله درجه دوم $kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$ اعدادی گویا هستند؟

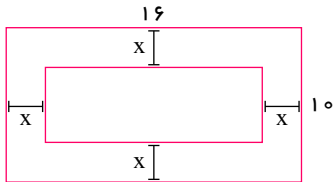
- ۱ $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
 ۲ $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$
 ۳ $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$
 ۴ $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$

۲- کدام یک از معادلات زیر جواب حقیقی ندارند؟

- ۱ $x^2 - 3x + 1 = 0$
 ۲ $3x^2 - 7x + 2 = 0$
 ۳ $-2x^2 - 3x + 4 = 0$
 ۴ $x^2 + 3x + 10 = 0$

۳- اگر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 با شرط $x_1 < x_2$ ریشه‌های معادله $(3 + 2\sqrt{2})x^2 + (1 + \sqrt{2})x - 2 = 0$ باشد. مقدار $|x_2 - x_1|$ را بدست آورید.

- ۱ $3(\sqrt{2} - 1)$
 ۲ $2 + 3\sqrt{2}$
 ۳ $1 - \sqrt{2}$
 ۴ $-1 + 2\sqrt{2}$



۴- در شکل مقابل مساحت مستطیل کوچک برابر ۴۰ است. مقدار x کدام است؟

- ۱ ۲
 ۲ $\frac{5}{2}$
 ۳ ۳
 ۴ $\frac{7}{2}$

۵- در کدام گزینه قدر مطلق تفاضل دو ریشه بزرگ‌تر است؟

- ۱ $6x^2 = 18$
 ۲ $2x^2 - 30 = 0$
 ۳ $(2x - 3)^2 - 24 = 12$
 ۴ $x^2 - 2x + 3 = 4$

۶- اگر معادله درجه دوم $(m + 2)x^2 + 4x + (m - 1) = 0$ دارای جواب حقیقی باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

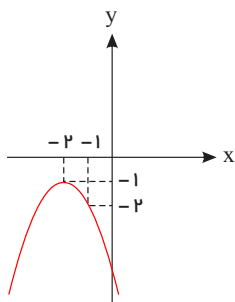
- ۱ $[-2, 2]$
 ۲ $[-3, 2]$
 ۳ $(-2, 2]$
 ۴ $[-3, 2] - \{-2\}$

۷- حاصل ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی، ۲۰ برابر مجموع آن سه عدد است. در این صورت مجموع آن سه عدد کدام است؟

- ۱ ۲۴
 ۲ ۱۲
 ۳ ۴۸
 ۴ ۹۶

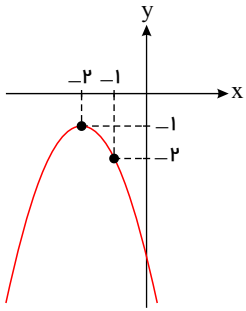
۸- کم‌ترین مقدار عبارت $x^2 + 8x$ به ازای مقادیر حقیقی x کدام است؟

- ۱ -۲۵
 ۲ -۱۶
 ۳ -۱۵
 ۴ -۸



۹- معادله‌ی سهمی شکل روبه‌رو کدام است؟

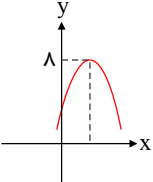
- ۱ $y = -x^2 - 4x - 3$
 ۲ $y = -x^2 + 4x - 5$
 ۳ $y = -x^2 - 4x - 5$
 ۴ $y = -4x^2 - 4x - 3$



۱۰- معادله سهمی شکل زیر کدام است؟

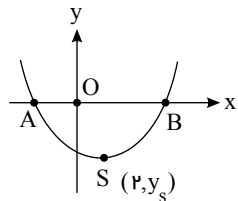
- ① $y = -x^2 - 4x - 3$
- ② $y = -x^2 + 4x - 5$
- ③ $y = -x^2 - 4x - 5$
- ④ $y = -4x^2 - 4x - 3$

۱۱- نمودار سهمی به معادله $y = -2x^2 + ax + a + 2$ به صورت زیر است. این سهمی قسمت مثبت محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



- ① ۵
- ② ۳
- ③ $\frac{4}{2}$
- ④ ۴

۱۲- در سهمی زیر، اگر $|OA| = |OB| = 2$ باشد، طول نقطه B کدام است؟

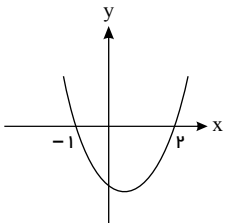


- ① ۳
- ② ۶
- ③ ۸
- ④ ۴

۱۳- اگر رأس یک سهمی نقطه $S(2, -1)$ باشد و سهمی از نقطه $(3, 2)$ عبور کند، عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

- ① -۸
- ② ۴
- ③ ۱۱
- ④ ۱۲

۱۴- شکل مقابل مربوط به سهمی $y = 2x^2 + bx + c$ است. عرض رأس سهمی $y = cx^2 - x + b$ کدام است؟



- ① $-\frac{31}{16}$
- ② $\frac{31}{16}$
- ③ -۲
- ④ ۲

۱۵- مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x+2)^2(x^2-3x+2)}{(-x^2+x)^3} \geq 0$ کدام است؟

- ① $(0, 2] \cup \{-2\}$
- ② $(0, 2] \cup (1, 2] \cup \{-2\}$
- ③ $(0, 2]$
- ④ $[-2, 0] \cup (1, 2]$

۱۶- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \geq 2$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

- ① ۴
- ② ۲
- ③ ۵
- ④ ۳

۱۷- عبارت $P = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$ در چند نقطه تغییر علامت می‌دهد؟

- ① ۵
- ② ۱
- ③ ۴
- ④ ۲

۱۸- اگر جدول تعیین علامت عبارت A به صورت زیر باشد و این عبارت فقط به ازای $-3 \leq x$ تعریف شود، در مجموعه‌ی جواب نامعادله

$\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{A} \geq 0$ ، مجموع اعداد صحیح کدام است؟

x	-۳	۰	۴
A	-	+	-

- ① ۳
- ② صفر
- ③ ۴
- ④ ۲

۱۹- عبارت $p(x) = (x^2 - 4x + 3)(2x^2 + ax + b)$ همواره نامنفی است. $a + b$ کدام است؟

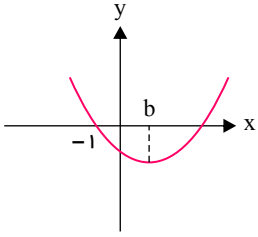
۴) -۲

۳) -۱

۲) ۱

۱) ۲

۲۰- در شکل مقابل نمودار سهمی و جدول تعیین علامت مربوط به آن آمده است، حاصل $a + b$ کدام است؟



x	a	۵
p	+ ۰ -	۰ +

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

در یک معادله درجه ۲ با ضرایب گویا، ریشه‌ها زمانی گویا هستند که Δ مربع کامل باشد.

$$\Delta = (2k - 1)^2 - 4k(k - 2) = 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8k = 4k + 1$$

برای آنکه $4k + 1$ مربع کامل باشد، k عضو مجموعه $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$

راهنمایی: با توجه به عبارت $4k + 1$ ، گزینه‌ها را آزمایش می‌کنیم تا معلوم شود کدام مجموعه مقادیر مربع کامل را تولید می‌کند.

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم وقتی $\Delta < 0$ باشد معادله جواب حقیقی نخواهد داشت.

۱) $\Delta = 9 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$ دو جواب

۲) $\Delta = 49 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 > 0$ دو جواب

۳) $\Delta = 9 - 4(-2)(4) = 9 + 32 = 41 > 0$ دو جواب

۴) $\Delta = 9 - 4(1)(10) = 9 - 40 = -31 < 0$ جواب ندارد

۳ - گزینه ۱

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4 \times (3 + 2\sqrt{2}) \times (-2) = (1 + \sqrt{2})^2 + 8(3 + 2\sqrt{2})$$

$$= (3 + 2\sqrt{2}) + 8(3 + 2\sqrt{2}) = 9(3 + 2\sqrt{2})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} &= \frac{\sqrt{9(3 + 2\sqrt{2})}}{3 + 2\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2} + 1)^2 &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج در } (\sqrt{2} - 1)} \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 3(\sqrt{2} - 1) = |x_2 - x_1|$$

۴ - گزینه ۳

$$S = 40 \Rightarrow (16 - 2x)(10 - 2x) = 40 \Rightarrow (8 - x)(5 - x) = 10 \Rightarrow x^2 - 13x + 40 = 10 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ یا } x = 3$$

مطابق شکل مقدار x نمی‌تواند برابر ۱۰ باشد، پس $x = 3$ تنها جواب قابل قبول برای مسأله است.

۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: $ax^2 + bx + c = 0$ و ریشه‌های معادله درجه دوی $x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$
 برابر است با $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $6x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} = |x_2 - x_1| = |\sqrt{3} + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

۲) $2x^2 - 30 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{15} \Rightarrow |x_2 - x_1| = |\sqrt{15} + \sqrt{15}| = 2\sqrt{15}$

۳) $(2x - 3)^2 - 24 = 12 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 36 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4,5 \\ 2x - 3 = -6 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -1,5 \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = |4,5 + 1,5| = 6$$

۴) $x^2 - 2x + 3 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

$$|x_1 - x_2| = |1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ تست است.



۶ - گزینه ۴ برای اینکه معادله درجه دوم ریشه داشته باشد باید $\Delta \geq 0$ باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(m+2)(m-1)$$

$$= 16 - 4(m^2 - m + 2m - 2) = 16 - 4(m^2 + m - 2)$$

$$= 16 - 4m^2 - 4m + 8 = -4m^2 - 4m + 24 = -4(m^2 + m - 6) \geq 0$$

باید این نامعادله را حل کنیم. چون (-4) منفی است پس باید نامعادله $m^2 + m - 6 \leq 0$ را حل کنیم. ابتدا ریشه‌های $m^2 + m - 6$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$m^2 + m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

m	-3	2
$m^2 + m - 6$	+	-

پس باید $-3 \leq m \leq 2$ باشد.

با توجه به این که معادله، درجه دوم است بنابراین m نمی‌تواند برابر -2 باشد. در نتیجه مجموع مقادیر m برابر است با:

$$\Rightarrow m = [-3, 2] - \{-2\}$$

۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: ریشه‌های معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

سه عدد زوج متوالی را به صورت $x, x+2, x+4$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$x(x+2)(x+4) = 20(x+x+2+x+4) \Rightarrow x(x+2)(x+4) = 20(3x+6)$$

$$\Rightarrow x(x+2)(x+4) = 20 \times 3(x+2) \Rightarrow x(x+4) = 60 \Rightarrow x^2 + 4x = 60$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-60)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$\Rightarrow x \begin{cases} \frac{-4+16}{2} = 6 \\ \frac{-4-16}{2} = -10 \end{cases} \Rightarrow x + x + 2 + x + 4 \stackrel{x=6}{=} 24$$

غ ق ق

۸ - گزینه ۲ سهمی به معادله $y = x^2 + 8x$ را در نظر می‌گیریم. ضریب x^2 مثبت است پس عرض رأس سهمی مقدار می‌نیم این عبارت خواهد بود:

$$\text{طول رأس} : -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times 1} = -4$$

$$\text{مقدار مینیمم تابع} : (-4)^2 + 8 \times (-4) = 16 - 32 = -16$$

۹ - گزینه ۳

معادله سهمی با رأس $S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ بصورت $y = k(x - \alpha)^2 + \alpha$ است.

بر طبق نمودار، رأس سهمی نقطه $S \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ است. پس:

$$y = k(x - (-2))^2 + (-1)$$

$$\Rightarrow y = k(x+2)^2 - 1$$

از طرفی این سهمی از نقطه $(-1, -2)$ نیز می‌گذرد. پس:

$$-2 = k(-1+2)^2 - 1 \Rightarrow -2 = k \times 1 - 1 \Rightarrow k = -1$$

پس معادله سهمی عبارتست از:

$$y = -(x+2)^2 - 1 = -(x^2 + 4x + 4) - 1 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 5$$

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی نقطه $S \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) \end{pmatrix}$ است.

۱۰ - گزینه ۳ می‌دانیم:

سهمی را به معادله $y = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم.



$$\text{رأس سهمی } S \left| \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow -b = -4a \Rightarrow b = 4a \quad (I)$$

نقاط $(-2, -1)$ و $(-1, 2)$ در سهمی به معادله $y = ax^2 + 4ax + c$ صدق می کند؛ داریم:

$$\begin{aligned} (-2, -1) : -1 &= 4a - 8a + c \Rightarrow \begin{cases} -4a + c = -1 & (II) \\ -1, -2) : -2 &= a - 4a + c \Rightarrow \begin{cases} -3a + c = -2 \\ -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(III) \rightarrow -4a + c = -1 \xrightarrow{a=-1} 4 + c = -1 \Rightarrow c = -5$$

$$(I) \rightarrow b = 4a \xrightarrow{a=-1} b = -4$$

$$y = -x^2 - 4x - 5$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$\text{رأس سهمی به معادله } y = ax^2 + bx + c \text{ نقطه } S \left(\begin{array}{l} -b \\ 2a \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) \end{array} \right) \text{ است.}$	<p>۱۱ - گزینه ۲ می دانیم:</p>
---	-------------------------------

$$\text{رأس سهمی } S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2(-2)} = \frac{a}{4} \\ f\left(\frac{a}{4}\right) = 8 \Rightarrow -2 \times \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + a + 2 = 8 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + a + 2 = 8 \xrightarrow{\times 8} -a^2 + 2a^2 + 8a + 16 = 64$$

$$\Rightarrow a^2 + 8a - 48 = 0 \Rightarrow (a + 12)(a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ a = 4 \end{cases}$$

باتوجه به طول رأس سهمی $0 < \frac{a}{4}$ بنابراین $a = -12$ غیر قابل قبول است و فقط $a = 4$ قابل قبول است.

$$a = 4 : y = -2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

۱۲ - گزینه ۳ نقاط A و B محل برخورد نمودار سهمی با محور x هستند و نقطه S ، نقطه رأس سهمی است.

$$2|OA| = |OB|$$

$$\text{فرض } : x_A = -a \Rightarrow x_B = 2a$$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_S \Rightarrow \frac{(-a) + (2a)}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow x_B = 2a \stackrel{a=4}{=} 8$$

۱۳ - گزینه ۳ اگر رأس سهمی نقطه (h, k) باشد، معادله آن را به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ می توان نوشت. پس:

$$\xrightarrow{(h,k)=(2,-1)} y = a(x - 2)^2 - 1 \quad (1)$$

نقطه $(3, 2)$ در معادله سهمی صدق می کند. پس:

$$2 = a(3 - 2)^2 - 1 \Rightarrow 2 = a - 1 \Rightarrow a = 3 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

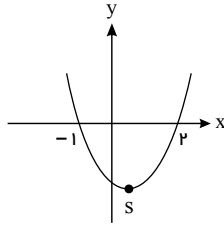
$$\Rightarrow y = 3(x - 2)^2 - 1$$

که در این صورت عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\xrightarrow{x=0} y = 3(-2)^2 - 1 = 11$$

۱۴ - گزینه ۱

با توجه به شکل $x = 2$ و $x = -1$ ریشه‌های معادله $2x^2 + bx + c = 0$ می‌باشند. از طرفی وسط دو ریشه طول رأس سهمی است پس:



$$x_s = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$x_s = \frac{-b}{2(2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -2$$

$$2x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[x=-1]{b=-2} 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$y = cx^2 - x + b \xrightarrow[b=-2]{c=-4} y = -4x^2 - x - 2$$

$$y_s \text{ جدید} = \frac{4a'c'}{4a'} = \frac{4(-4)(-2) - (-1)^2}{4(-4)} = \frac{-31}{16}$$

پس:

در نتیجه:

۱۵ - گزینه ۲

ریشه مضاعف: $(x + 2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(-x^2 + x)^2 = 0 \rightarrow -x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ریشه‌های مخرج}$$

x	-2	0	1	2
$(x+2)^2$	+ ○ +	+ +	+ +	+ +
$x^2 - 3x + 2$	+ +	+ +	+ ○ -	+ +
$(-x^2 + x)^2$	- -	- ○ +	+ ○ -	- -
P(x)	- ○ -	ن ت	ت ن	+ ○ -

مجموعه جواب = $(0, 1) \cup (1, 2) \cup \{-2\}$

۱۶ - گزینه ۴

$$\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{4 - 2x}{x^2} \geq 2 \Rightarrow \frac{4 - 2x}{x^2} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 2x + 4}{x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

x	-2	0	1
$-2x^2 - 2x + 4$	- ○ +	+ +	+ ○ -
x^2	+ +	+ ○ +	+ +
$\frac{-2x^2 - 2x + 4}{x^2}$	- ○ +	ن ت	+ ○ -

شامل ۳ عدد صحیح است. \Rightarrow مجموعه جواب = $[-2, 1] - \{0\}$

۱۷ - گزینه ۲

$$P = \frac{x^2 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2(x + 2) - (x + 2)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x + 2)(x - 1)(x + 1)}{(x + 2)(x - 1)}$$



$$\frac{x-2}{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1$$

	-2	-1	1
P	-	+	+

۱۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x^2 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$ است که در آن همواره مثبت است و در تعیین علامت تأثیری ندارد. عبارت $Q(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{A}$ را تعیین علامت می‌کنیم دقت کنید که A فقط به ازای $x \geq -3$ تعریف می‌شود.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$(x^2-1)(x+2)$	-	-	+	+	-	-	+	+
A						+	+	-
Q(x)		+	-	-	+	-	+	-

ت ن
ت ن
ت ن

مجموعه جواب نامعادله به صورت $(-3, -2] \cup [-1, 0) \cup [1, 2)$ است. که اعداد صحیح آن مجموعه $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ است. مجموع اعضای این مجموعه برابر با ۳ است.

۱۹- گزینه ۴ طبق فرض عبارت $p(x) = (x^2 - 4x + 3)(2x^2 + ax + b)$ همواره نامنفی است، یعنی به ازای تمامی مقادیر حقیقی x ، شرط $p(x) \geq 0$ برقرار است. چون ریشه‌های عبارت $(x^2 - 4x + 3)$ ساده هستند، پس در طرفین این ریشه‌ها قطعاً تغییر علامت خواهیم داشت. حال برای این که عبارت $p(x)$ تغییر علامت ندهد، باید ریشه‌های عبارت $(2x^2 + ax + b)$ همان ریشه‌های عبارت $(x^2 - 4x + 3)$ باشند تا به دلیل وجود ریشه‌های مضاعف، تغییر علامت اتفاق نیفتد. چون ریشه‌های عبارت $(x^2 - 4x + 3)$ مقادیر $x = 1$ و $x = 3$ هستند، پس باید ریشه‌های عبارت $(2x^2 + ax + b)$ نیز برابر $x = 1$ و $x = 3$ باشند که در این صورت خواهیم داشت:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 3 = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = -8$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = 1 \times 3 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = -2$$

۲۰- گزینه ۱ با توجه به جدول تعیین علامت، a ریشه کوچک‌تر معادله $y = 0$ است و با توجه به نمودار سهمی، این مقدار برابر -1 می‌باشد. ضمناً از آنجا که ریشه بزرگ‌تر در جدول برابر 5 است، پس به علت تقارن سهمی b میانگین 5 و -1 است، یعنی:

$$b = \frac{5 - 1}{2} = 2 \Rightarrow a + b = 2 - 1 = 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴

۴ - ۳

۷ - ۱

۱۰ - ۳

۱۳ - ۳

۱۶ - ۴

۱۹ - ۴

۲ - ۴

۵ - ۲

۸ - ۲

۱۱ - ۲

۱۴ - ۱

۱۷ - ۲

۲۰ - ۱

۳ - ۱

۶ - ۴

۹ - ۳

۱۲ - ۳

۱۵ - ۲

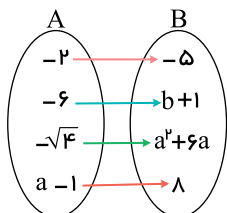
۱۸ - ۱



۱- در کدام گزینه، رابطه y بر حسب x یک تابع را نمایش می دهد؟

- ۱ $|x| + |y| = 5$
 ۲ $x = 2(y+1)^3$
 ۳ $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 4$
 ۴ $|xy| = 4$

۲- نمودار پیکانی مقابل نشان دهنده یک تابع است. حاصل $a \times b$ کدام است؟



- ۱ -7
 ۲ 7
 ۳ -35
 ۴ 35

۳- کدام یک از توابع زیر، وجود ندارند؟

- ۱ تابعی با دامنه 3 عضو و برد 3 عضوی
 ۲ تابعی با دامنه 2 عضو و برد 2 عضوی
 ۳ تابعی با دامنه 3 عضو و برد 2 عضوی
 ۴ تابعی با دامنه 2 عضو و برد 3 عضوی

۴- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 4x - 2 & x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $[-2, +\infty)$
 ۲ $[0, +\infty)$
 ۳ $(-\infty, 2)$
 ۴ \mathbb{R}

۵- اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & x \leq -1 \\ -|x| - 1 & -1 < x \leq 2 \end{cases}$ به صورت $[a, b] \cup [c, +\infty)$ باشد، $a + b + c$ کدام است؟

- ۱ -5
 ۲ -4
 ۳ -3
 ۴ -6

۶- تابع خطی $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر دامنه و برد این تابع به ترتیب $[2, 5]$ و $[-3, 2]$ باشد، آنگاه $a - b$ کدام می تواند باشد؟

- ۱ -8
 ۲ -7
 ۳ -6
 ۴ -5

۷- برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ کدام است؟

- ۱ $(-1, 1]$
 ۲ $(-1, 1)$
 ۳ $(0, 1]$
 ۴ $(0, 1)$

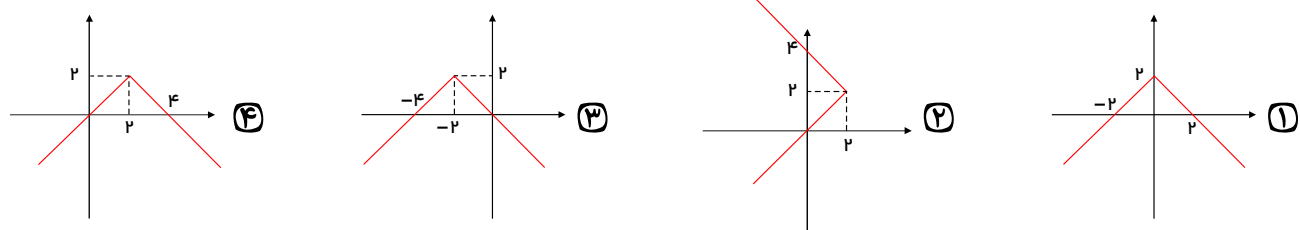
۸- تابع $f(x) = -2x + 7$ با دامنه $D_f = (-3, 4]$ مفروض است. برد تابع شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ 13
 ۲ 15
 ۳ 16
 ۴ 14

۹- نقطه $A(-2, 2)$ بر روی تابع $f(x) = \frac{a-2x}{3}$ قرار دارد. اگر برد تابع، مجموعه $\{-3, 2, 4, 0\}$ باشد، حاصل جمع اعضای دامنه تابع f کدام است؟

- ۱ $0,5$
 ۲ $-0,5$
 ۳ $1,5$
 ۴ $-1,5$

۱۰- نمودار هندسی تابع $y = -|x - 2| + 2$ کدام است؟



۱۱- اگر $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$ ، آنگاه $f(x+2) - f(x)$ کدام است؟

- ① $-2x + 2$ ② $2x - 2$ ③ $2x$ ④ 2

۱۲- نمودار تابع $f(x) = x^2$ را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. معادلهٔ منحنی جدید کدام است؟

- ① $y = x^2 - 4x + 1$ ② $y = x^2 + 4x - 1$ ③ $y = x^2 - 2x + 3$ ④ $y = x^2 + 2x - 3$

۱۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + ax + b$ و خط به معادله $y + 2x = b$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور x ها متقاطع‌اند؛ طول دیگر نقاط تلاقی این منحنی و خط، کدام است؟

- ① -1 و 2 ② -1 و 3 ③ -1 و 0 ④ 0 و 2

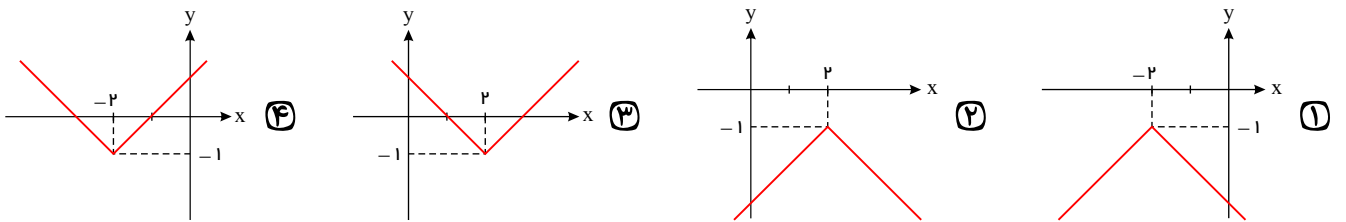
۱۴- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

- ① $x^2 + 1$ ② $x^2 + 3$ ③ $x^2 + 4x + 5$ ④ $x^2 - 4x + 5$

۱۵- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای توابع $y = |x+1|$ و $y = |x-3|$ و محور x ها کدام است؟

- ① 5 ② 4 ③ 6 ④ 3

۱۶- نمودار تابع $y = -| -x + 2 | - 1$ به کدام صورت است؟



۱۷- اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$ باشد؛ مقدار $f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

۱۸- اگر رابطه‌ی $f = \{(\sqrt{3}, 7), (-2, b), (\sqrt{3}, a^2 + 3), (a, 1), (2, 2)\}$ تابع باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ① 3 ② 2 ③ -1 ④ 1

۱۹- برای تابع خطی f می‌دانیم: $f(1) - f(0) = 3$. مقدار $f(-1) - f(1)$ کدام است؟

- ① 3 ② -3 ③ 6 ④ -6

۲۰- اگر تابع $y = (a^2 - \frac{3}{2}a)x^2 + 2ax + 4$ یک تابع خطی و نقطه $(2, 10)$ عضو این تابع باشد، این تابع محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

- ① $\frac{-2}{3}$ ② 4 ③ $\frac{-3}{4}$ ④ $\frac{-4}{3}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: رابطه‌ای تابع است که به ازای هر x ، تنها یک y داشته باشیم.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $|x| + |y| = 5 \Rightarrow |y| = 5 - |x| \Rightarrow y = \begin{cases} 5 - x \\ 5 + x \end{cases}$ تابع نیست.

۲) $x = 2(y+1)^2 \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow y+1 = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$ تابع است.

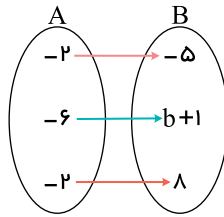
۳) $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{(x-1)^2}{4} \Rightarrow y = \pm \sqrt{4 - \frac{(x-1)^2}{4}}$ تابع نیست.

۴) $|xy| = 4 \Rightarrow |x||y| = 4 \Rightarrow |y| = \frac{4}{|x|} \Rightarrow y = \pm \frac{4}{x}$ تابع نیست.

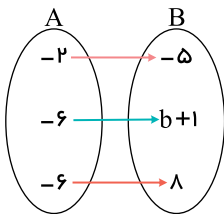
۲ - گزینه ۳ با توجه به اینکه $-\sqrt{4} = -2$ ، پس باید از -2 فقط یک پیکان خارج شود و در نتیجه باید $a^2 + 6a = -5$ باشد:

$a^2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow (a+1)(a+5) = 0 \Rightarrow a = -1, a = -5$

به ازای $a = -1$ داریم:



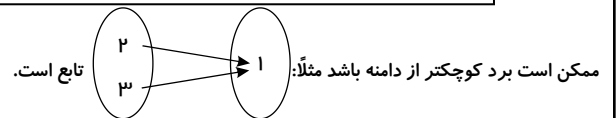
در این حالت تابع نیست، زیرا عضو -2 از A به دو عضو متفاوت از B متناظر شده است. به ازای $a = -5$ داریم:



$\Rightarrow b + 1 = 8 \Rightarrow b = 7$

بنابراین: $a \times b = -5 \times 7 = -35$

۳ - گزینه ۴ رابطه‌ای که تابع است که به ازای هر y فقط یک x موجود باشد.



ممکن است برد کوچکتر از دامنه باشد مثلاً: $f(x) = 1$ تابع است.

اما ممکن نیست دامنه کوچکتر از برد باشد.

۴ - گزینه ۴

$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$x < 1 \Rightarrow 4x < 4 \Rightarrow 4x - 2 < 4 - 2 \Rightarrow f(x) < 2$

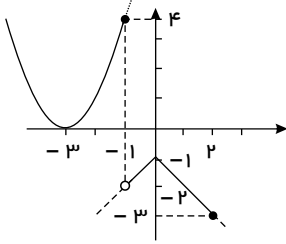
برد تابع اجتماع دوبازه است، پس برد \mathbb{R} است.

۵ - گزینه ۲

$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & x \leq -1 \\ -|x| - 1 & -1 < x \leq 2 \end{cases}$

ابتدا تابع $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم: برای رسم تابع $y = (x+3)^2$ نمودار $y = x^2$ را به اندازه ۳ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم تابع $y = -|x| - 1$ تابع $y = |x|$

را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا $y = -|x|$ به دست آید.



پس آن را یک واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = -|x| - 1$ حاصل شود. حال با توجه به شکل $f(x)$ برد آن به صورت زیر می باشد:

$$f \text{ برد} = [-3, 1] \cup [0, +\infty) = [a, b] \cup [c, +\infty) \Rightarrow a = -3, b = -1, c = 0 \Rightarrow a + b + c = -4$$

۶ - گزینه ۲ در توابع خطی $f(x) = ax + b$ اگر دامنه به صورت $[x_1, x_2]$ باشد، آن گاه برد یا به صورت $[f(x_1), f(x_2)]$ و یا به صورت $[f(x_2), f(x_1)]$ خواهد بود (بسته به این که بزرگتر است یا $f(x_2)$ یا $f(x_1)$ دو حالت گفته شده رخ می دهد) پس داریم:

$$\begin{cases} f(2) = -3, f(5) = 2 & (1) \\ \text{یا} \\ f(2) = 2, f(5) = -3 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} f(2) = -3 \Rightarrow 2a + b = -3 \\ f(5) = 2 \Rightarrow 5a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = -\frac{19}{3} \Rightarrow a - b = 8$$

$$\xrightarrow{(2)} \begin{cases} f(2) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \\ f(5) = -3 \Rightarrow 5a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{3}, b = \frac{16}{3} \Rightarrow a - b = -7$$

پس $a - b$ یا برابر ۸ است یا برابر -7 که در گزینه ها تنها عدد -7 وجود دارد.

۷ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \rightarrow y = \frac{(\sqrt[6]{x} + 1) - 2}{\sqrt[6]{x} + 1} \rightarrow y = 1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x} + 1} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \sqrt[6]{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt[6]{x} + 1 \geq 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{x} + 1} \leq 1 \rightarrow \frac{-2}{\sqrt[6]{x} + 1} \geq -2$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x} + 1} \geq -1$$

پس کمترین مقدار f ، عدد -1 است و بیشترین مقدار آن هم به سمت یک نزدیک می شود، ولی به آن نمی رسد، یعنی:

$$R_f = [-1, 1)$$

۸ - گزینه ۴ با توجه به دامنه و ضابطه تابع، برد آن را می یابیم:

$$f(x) = -2x + 7, D_f = (-3, 4] \\ -3 < x \leq 4 \xrightarrow{\times(-2)} 6 > -2x \geq -8 \xrightarrow{+7} -8 + 7 \leq -2x + 7 < 6 + 7 \\ \Rightarrow -1 \leq f(x) < 13 \Rightarrow R_f = [-1, 13)$$

اعداد صحیح برد تابع عبارتند از:

$$-1, 0, 1, 2, \dots, 12 \Rightarrow \text{تعداد} = 14$$

۹ - گزینه ۲ چون نقطه $A(-2, 2)$ بر روی تابع $f(x) = \frac{a - 2x}{3}$ قرار دارد، پس $f(-2) = 2$ و داریم:

$$f(-2) = \frac{a + 4}{3} = 2 \Rightarrow a + 4 = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2 - 2x}{3}$$

حال با توجه به برد تابع، اعضای دامنه تابع را می یابیم.

$$\text{برد} = R_f = \{-3, 2, 4, 0\}$$

$$f(x) = -3 \Rightarrow \frac{2 - 2x}{3} = -3 \Rightarrow 2 - 2x = -9 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

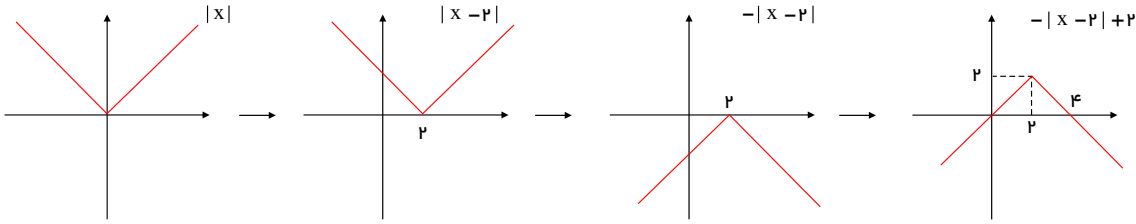
$$f(x) = 2 \xrightarrow{A(-2, 2)} x = -2$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow \frac{2 - 2x}{3} = 4 \Rightarrow 2 - 2x = 12 \Rightarrow x = -5$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2x}{3} = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

دامنه = $D_f = \left\{ \frac{11}{2}, -2, -5, 1 \right\} \Rightarrow$ حاصل جمع اعضا = $5,5 - 2 - 5 + 1 = -0,5$

۱۰ - گزینه ۴



۱۱ - گزینه ۱

$$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \frac{-1}{2}(x+2)^2 + 2(x+2) = \frac{-1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 2x + 4 \\ &= \frac{-1}{2}x^2 - 2x - 2 + 2x + 4 = \frac{-1}{2}x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+2) - f(x) &= \frac{-1}{2}x^2 + 2 - \left(\frac{-1}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= \frac{-1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^2 - 2x = -2x + 2 \end{aligned}$$

۱۲ - گزینه ۱ با انتقال $f(x) = x^2$ واحد به سمت راست داریم: $y = (x-2)^2$ و با انتقال آن ۳ واحد به سمت پایین داریم:

$$y = (x-2)^2 - 3$$

$$y = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

۱۳ - گزینه ۳ هر دو نمودار از نقطه‌ای به طول ۱ روی محور x ها می‌گذرند پس از نقطه‌ی $(1, 0)$ می‌گذرند:

$$y + 2x = b \xrightarrow{(1,0)} 0 + 2 = b \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$f(x) = x^2 + ax + b \xrightarrow{(1,0)} 1 + a + b = 0 \xrightarrow{b=2} \boxed{a = -3}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$y + 2x = 2$$

نقاط تلاقی:

$$x^2 - 3x + 2 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۴

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$$

$$f(x-3) = (x-2)^2 + 1$$

$$x-3 = t \Rightarrow x-2 = t+1$$

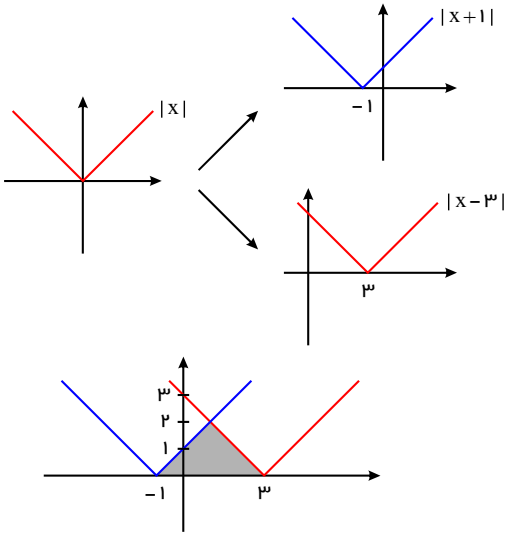
$$\Rightarrow f(t) = (t+1)^2 + 1$$

$$t = 1-x \Rightarrow t+1 = 2-x$$

$$f(1-x) = (2-x)^2 + 1 = 4 + x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 5$$

می‌دانیم: برای رسم تابع $f(x) + k$ کافیت تابع $f(x)$ را k واحد در راستای عمود جابه‌جا کنیم.
 اگر $k \geq 0$ بود انتقال به سمت بالا و اگر $k < 0$ بود انتقال به سمت پایین است.
 برای رسم تابع $f(x + k)$ کافیت تابع $f(x)$ را k واحد در راستای افق جابه‌جا کنیم.
 اگر $k > 0$ بود انتقال به سمت چپ و اگر $k < 0$ بود انتقال به سمت راست است.
 برای رسم تابع $-f(x)$ کافیت تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
 برای رسم تابع $f(-x)$ کافیت تابع $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

با رسم نمودار هر یک از توابع داریم:



برای محاسبه ارتفاع مثلث کافیت عرض نقطه تلاقی در نمودار را محاسبه کنیم:

$$-1 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-3| = -x+3 \end{cases} \Rightarrow x+1 = -x+3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = x + 1 = 2$$

$$S_{\Delta} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

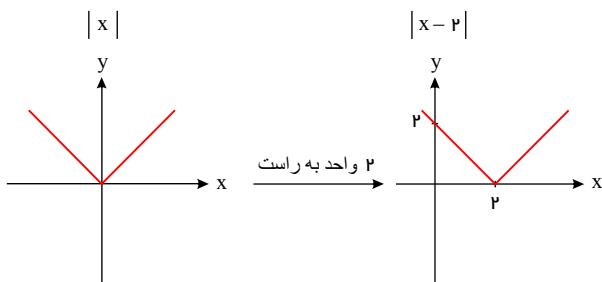
می‌دانیم: $|u| = |-u|$

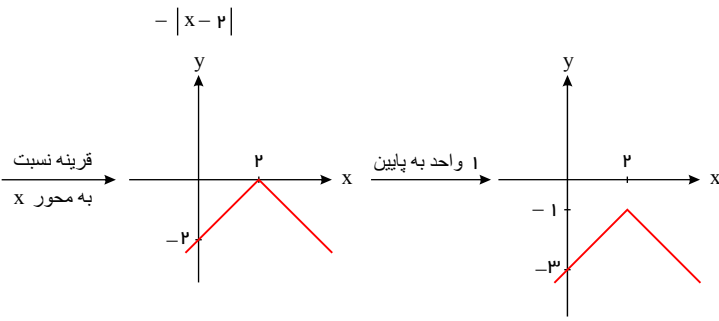
تابع را به صورت زیر، ساده می‌نویسیم:

$$y = -|-(x-2)| - 1$$

$$\Rightarrow y = -|x-2| - 1$$

حال از تابع $y = |x|$ شروع می‌کنیم:





۱۷ - گزینه ۴

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| 3 \times \frac{1}{2} - 5 \right| = \left| \frac{3}{2} - \frac{10}{2} \right| = \left| \frac{-7}{2} \right| = \frac{7}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

۱۸ - گزینه ۳ رابطه‌های تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{3}, 7) \in f \\ (\sqrt{3}, a^2 + 3) \in f \end{array} \right. \Rightarrow a^2 + 3 = 7 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$a = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \in f \\ (2, 2) \in f \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

$$a = -2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-2, b) \in f \\ (-2, 1) \in f \end{array} \right. \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

۱۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: ضابطه هر تابع خطی به فرم $f(x) = ax + b$ است.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = a + b \\ f(0) = 0 + b = b \\ \text{فرض: } f(1) - f(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b - b = 3 \Rightarrow a = 3$$

۲۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: ضابطه هر تابع خطی به فرم $f(x) = ax + b$ است.

از آنجا که تابع خطی (درجه ۱) است، باید ضریب x را صفر کنیم:

$$a^2 - \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow a\left(a - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow y = 4 \quad (I) \\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 3x + 4 \quad (II) \end{cases}$$

اما مختصات نقطه $(2, 10)$ باید در تابع صدق کند. پس فقط II را می‌پذیریم.

$$y = 3x + 4 \xrightarrow{y=10} 3x + 4 = 10 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۴

۷ - ۲

۱۰ - ۴

۱۳ - ۳

۱۶ - ۲

۱۹ - ۴

۲ - ۳

۵ - ۲

۸ - ۴

۱۱ - ۱

۱۴ - ۴

۱۷ - ۴

۲۰ - ۴

۳ - ۴

۶ - ۲

۹ - ۲

۱۲ - ۱

۱۵ - ۲

۱۸ - ۳



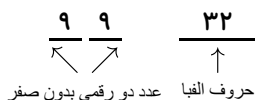
۱- آرش در یک آزمون با ۶ سوال ۴ گزینه‌ای و ۴ سوال ۳ گزینه‌ای شرکت می‌کند. اگر پاسخ به سوال‌های ۳ گزینه‌ای در این آزمون الزامی باشد، آرش به چند طریق می‌تواند پاسخنامه خود را پر کند؟

- ① $4^6 \times 3^3$ ② $4^4 \times 5^6$ ③ $4^6 \times 3^4$ ④ $5^6 \times 3^4$

۲- با ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز که دهگانی بزرگ‌تر از یکان دارند می‌توان نوشت؟

- ① ۲۴ ② ۶۰ ③ ۷۸ ④ ۷۲

۳- شماره‌گذاری اتومبیل‌ها در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد دو رقمی بدون صفر است. اگر شروع شماره‌گذاری از (الف - ۱۱) و به‌طوری صعودی باشد، شماره هزارمین اتومبیلی که شماره‌گذاری می‌شود، کدام است؟



- ① (د - ۴۱) ② (ر - ۳۹) ③ (ز - ۴۱) ④ (ز - ۳۹)

۴- با ارقام ۰, ۲, ۳, ۴, ۷ چند عدد چهار رقمی زوج کوچک‌تر از ۴۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ① ۳۶ ② ۴۲ ③ ۳۴ ④ ۳۸

۵- چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ می‌توان ساخت به‌طوری که از ۳۳۰ بزرگ‌تر باشد؟

- ① ۶۰ ② ۴۸ ③ ۵۳ ④ ۶۸

۶- چند عدد چهار رقمی مضرب پنج، با ارقام متمایز وجود دارد؟

- ① ۹۵۲ ② ۸۹۶ ③ ۷۵۸ ④ ۶۴۲

۷- چند جایگشت چهار حرفی با حروف کلمه‌ی IRANIAN می‌توان نوشت که دقیقاً دو حرف آن تکراری باشد؟

- ① ۸۰ ② ۱۰۸ ③ ۱۲۰ ④ ۱۴۴

۸- مقدار n در معادله $n! = (12! + 13!)13!$ کدام است؟

- ① ۱۱ ② ۱۳ ③ ۱۴ ④ ۱۵

۹- اگر $2^9 \times 3^5 \times 350 \times 143 = n!$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(n-1) \cdots (n-11)(n-12)(n-13)$ کدام است؟

- ① $13!$ ② $12!$ ③ $14!$ ④ صفر

۱۰- در معادله ${}^3P(2n, 3) = {}^{14}P(n, 2)$ مقدار n برابر کدام است؟

- ① ۴ ② ۶ ③ ۷ ④ وجود ندارد.

۱۱- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه "Hamrahan" به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند، کدام است؟

- ① ۱۸۰ ② ۱۲۰ ③ ۷۲۰ ④ ۳۶۰

۱۲- حاصل عبارت $1! - (2! - 3!) + \frac{5!}{3!}$ کدام است؟

- ① ۴۳ ② ۵۲ ③ ۳۸ ④ ۴۶



۱۳- دانش آموز پایه دهم، ۳ دانش آموز پایه یازدهم و تعدادی دانش آموز پایه دوازدهم می خواهند صفی در یک ردیف تشکیل دهند. اگر تعداد حالتی که یازدهمی ها کنار هم هستند، یک دهم تعداد حالتی باشد که دهمی ها کنار هم هستند، تعداد دوازدهمی ها چند نفر است؟

- ① ۷ ② ۲۳ ③ ۶ ④ ۲۶

۱۴- می خواهیم شورای ۳ نفره ای از بین ۶ نفر سال دهمی، ۵ نفر سال یازدهمی و ۴ نفر سال دوازدهمی تشکیل دهیم، به طوری که حداقل ۲ نفر از آن ها سال یازدهمی باشند. به چند روش این کار امکان پذیر است؟

- ① ۱۰۰ ② ۱۱۰ ③ ۴۵ ④ ۴۴

۱۵- تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه ۸ عضوی A به طوری که فاقد b باشد و a و c همراه هم نیابند، کدام است؟

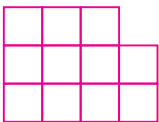
$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

- ① ۱۰ ② ۱۱ ③ ۵ ④ ۶

۱۶- از میان ۵ نفر کلاس اولی، ۷ نفر کلاس دومی و ۶ نفر کلاس سومی به چند طریق می توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که هم کلاسی باشند؟

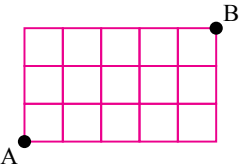
- ① ۱۰ ② ۳۵ ③ ۴۵ ④ ۶۵

۱۷- در شکل روبه رو چند مستطیل دیده می شود؟



- ① ۴۰ ② ۴۸ ③ ۵۰ ④ ۵۶

۱۸- در شبکه روبه رو به چند طریق می توان از نقطه A به نقطه B رفت اگر فقط حرکات به سمت راست و بالا مجاز باشد؟



- ① ۴۵ ② ۴۸

- ③ ۵۲ ④ ۵۶

۱۹- از بین ۱۰ نفر به نام های a_1 تا a_{10} که a_1 با a_2 و a_2 با a_3 و a_3 با a_4 برادر است، می خواهیم ۵ نفر انتخاب کنیم به طوری که دو برادر در تیم انتخابی نباشند. این کار به چند طریق ممکن است؟

- ① ۱۴۶ ② ۲۲۰ ③ ۱۰۶ ④ ۱۹۲

۲۰- از تهران ۴ نفر و از شهرهای شیراز، مشهد، اصفهان و کرج هر کدام ۳ نفر در جلسه ای هستند. تیمی ۴ نفره از افراد غیرمشمهری حاضر در جلسه، به چند طریق قابل انتخاب است؟

- ① ۵۴۰ ② ۵۲۳ ③ ۵۰۷ ④ ۵۱۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: اگر کاری را به دو روش بتوان انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار موردنظر به $m + n$ روش قابل انجام است.
اگر کاری دارای ۲ مرحله باشد که در مرحله اول m روش و در مرحله دوم n روش داشته باشیم، کل کار موردنظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

۶ سوال ۴ گزینه‌ای: هر سوال ۵ حالت (یکی از گزینه‌ها یا بی‌جواب ماندن سوال): 5^6

۴ سوال ۳ گزینه‌ای: هر سوال ۳ حالت (یکی از ۳ گزینه): 3^4

بنابراین اصل ضرب جواب کل مسأله برابر است با: $5^6 \times 3^4$

۲ - گزینه ۴

می‌دانیم: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار موردنظر به $m + n$ حالت انجام پذیر است.
اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به طوری که در مرحله اول m حالت و در مرحله دوم n حالت داشته باشیم، کل کار موردنظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.

حالت اول: اگر ۲ یکان باشد:

$$\frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = 48$$

۴
۵
۸

حالت دوم: اگر ۴ یکان باشد:

$$\frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = 24$$

۸

حالت سوم: اگر یکان ۸ باشد عددی بزرگ‌تر از ۸ نیست پس دهگانی نداریم پس این حالت اتفاق نمی‌افتد.

بنابراین اصل جمع برای کل کار موردنظر $48 + 24 = 72$ حالت داریم.

۳ - گزینه ۳ تعداد اعداد دو رقمی بدون صفر $81 = 9 \times 9$ می‌شود و این یعنی با هر حرف الفبا، ۸۱ اتومبیل می‌توانند پلاک شوند، پس برای آن‌که بفهمیم هزارمین اتومبیل، کدام حروف الفبا را در پلاک خود دارد، باید ۱۰۰۰ را بر ۸۱ تقسیم کنیم:

$$1000 = (81 \times 12) + 28$$

یعنی تا به هزارمین اتومبیل برسیم، ۱۲ سری کامل تمام شده است و سری سیزدهم باید در حال انجام باشد که با ترتیب موجود در الفبای فارسی، ۱۳ امین حرف الفبا حرف 'ز' است. اکنون باید

بینیم ۲۸ امین اتومبیل در سری 'ز' چه عدد دو رقمی را در پلاک خود دارد. در هر فاصله ده تایی، ۹ اتومبیل شماره می‌شوند (مثلاً از ۱۰ تا ۲۰، پلاک‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۰۰۰ و ۱۹ را داریم). پس داریم:

$$28 \div 9 \rightarrow 28 = (3 \times 9) + 1$$

پس اولین اتومبیل از ده تایی چهارم در حال شماره‌گذاری است و جواب (ز - ۴۱) می‌باشد.

۴ - گزینه ۳

برای هزارگان عدد سه حالت وجود دارد:

الف) هزارگان = ۲

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} \times \frac{2}{40} = 12$$

۲
۴ یا ۰

(ابتدا هزارگان و سپس یکان را انتخاب می‌کنیم).

ب) هزارگان = ۳

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} \times \frac{3}{40} = 18$$

۳
۴ یا ۰



$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = 4$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$12 + 18 + 4 = 34$$

۵ - گزینه ۲

این اعداد به دو حالت می‌باشند:

(الف) اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۴ یا ۵ است که تعداد حالت‌های انتخاب آن‌ها $4 \times 5 \times 2 = 40$ است. (در این حالت رقم دهگان می‌تواند هر کدام از ارقام باشد)

(ب) اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۳ است که تعداد حالت‌های انتخاب آن‌ها $4 \times 2 \times 1 = 8$ است چرا که در این حالت رقم دهگان فقط می‌تواند ۴ یا ۵ باشد.

طبق اصل جمع جواب برابر است با:

$$40 + 8 = 48$$

۶ - گزینه ۱ برای اینکه عددی مضرب ۵ باشد، باید رقم یکان آن صفر و یا ۵ باشد، چون انتخاب رقم صفر در یکان و هزارگان به هم وابسته است، پس مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم و طبق اصل جمع جواب‌ها را جمع می‌کنیم.

حالت اول: یکان عدد صفر باشد:

$$\frac{9}{\{0\}} \times \frac{8}{\{0\}} \times \frac{7}{\{0\}} \times \frac{1}{\{0\}} = 504$$

همه اعداد بهجز صفر

حالت دوم: یکان عدد پنج باشد:

$$\frac{8}{\{5\}} \times \frac{8}{\{5\}} \times \frac{7}{\{5\}} \times \frac{1}{\{5\}} = 448$$

همه اعداد بهجز صفر و پنج

پس طبق اصل جمع $504 + 448 = 952$ عدد وجود دارد.

۷ - گزینه ۲ حروف کلمه‌ی داده شده عبارت‌اند از: R, N, N, A, A, I, I

ابتدا دو حرف تکراری را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{3}{1} = 3$$

سپس از ۵ حرف باقی‌مانده، دو حرف متمایز را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{3}{2} = 3$$

مثلاً حروف N, I, A را انتخاب کرده‌ایم، تعداد جایگشت‌های این چهار حرف برابر است با:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$3 \times 3 \times 12 = 108$$

پس تعداد جایگشت‌های مورد نظر برابر است با:

۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $n! = n(n-1)!$

$$13(13! + 12!) = 13(13 \times 12! + 12!) = 13 \times 12!(13 + 1) = 12! \times 13 \times 14 = 14! \Rightarrow n = 14$$

۹ - گزینه ۴ ابتدا عدد داده شده را تجزیه می‌کنیم و حاصل ضرب اعداد ۱ تا n را از بین آن‌ها می‌سازیم:

$$n! = 143 \times 350 \times 3^5 \times 2^9 = \underbrace{11 \times 13}_{143} \times \underbrace{2 \times 5}_{350} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^5} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^9}$$

$$= 13 \times (3 \times 2^2) \times (11) \times (2 \times 5) \times (3^3) \times (2^3) \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 = 13! \Rightarrow n = 13$$

$$\Rightarrow (n-13)(n-12)(n-1) \dots (n-1) \stackrel{n=13}{=} 0$$

۱۰ - گزینه ۴ با استفاده از رابطه‌ی ترتیب، مقادیر $P(n, 2)$ و $P(2n, 3)$ را می‌نویسیم:

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$P(2n, 3) = \frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{(2n-3)!} = (2n-2)(2n-1)2n = 4n(n-1)(2n-1)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$12n(n-1)(2n-1) \stackrel{n \neq 0,1}{=} 12(2n-1) = 14$$

$$\Rightarrow 2n-1 = \frac{7}{6} \Rightarrow 2n = \frac{7}{6} + 1 \Rightarrow n = \frac{13}{12}$$

که با توجه به این‌که در $P(n, 2)$ باید n عدد طبیعی باشد، پس $n = \frac{13}{12}$ قابل قبول نیست.



ابتدا طبق شرط حروف را دسته‌بندی می‌کنیم.

$$H h | a a a | r m n$$

مطابق دسته‌بندی ۵ شی داریم پس جایگشت آن $5! = 120$ است و چون حروف داخل دسته‌ها یکسان است، تفاوتی در جابه‌جایی نخواهیم داشت.

$$\text{نکته: } n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\frac{5!}{3!} + (3! - 2!) - 1! = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} + (3 \times 2 \times 1 - 2!) - 1! = 20 + 4! - 1 = 20 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 1 = 20 + 24 - 1 = 43$$

۱۳ - گزینه ۴ اگر تعداد دوازدهمی‌ها را n فرض کنیم، داریم:

(الف) تعداد حالاتی که یازدهمی‌ها کنار هم هستند:

$$\boxed{3} \text{ نفر } n \text{ نفر } 2 \text{ نفر } 3 \text{ نفر}$$

دانش‌آموزان یازدهم را یک بسته فرض می‌کنیم، پس یک صف $n + 3$ نفری داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \underbrace{(n+3)!}_{\text{جایگشت یازدهمی‌ها}} \underbrace{3!}_{\text{جایگشت } n+2 \text{ نفر و بسته یازدهمی‌ها}}$$

(ب) تعداد حالاتی که دهمی‌ها کنار هم باشند:

$$\boxed{2} \text{ نفر } n \text{ نفر } 3 \text{ نفر } 2 \text{ نفر}$$

دانش‌آموزان دهم را یک بسته فرض می‌کنیم، پس یک صف $n + 4$ نفری داریم:

$$\text{تعداد حالات} = \underbrace{(n+4)!}_{\text{جایگشت دهمی‌ها}} \underbrace{2!}_{\text{جایگشت } n+3 \text{ نفر و بسته دهمی‌ها}}$$

$$\frac{\text{تعداد حالت الف}}{\text{تعداد حالت ب}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{(n+3)!3!}{(n+4)!2!} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+3)! \times 6}{(n+4)(n+3)! \times 2} = \frac{1}{10} \Rightarrow n+4 = 30 \Rightarrow n = 26$$

می‌دانیم: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم،کل کار مورد نظر به $m + n$ حالت انجام پذیر است.اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به طوری که در مرحله اول m حالت و در مرحله دوم n حالت داشته باشیم،کل کار مورد نظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.تعداد حالت‌های انتخاب r شی از n شی که ترتیب انتخاب مهم نباشد یک ترکیب r تایی از n شی متمایز نامیده می‌شود که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

حداقل ۲ یعنی: ۲ یا ۳

$$\binom{5}{2} \binom{10}{1} + \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{2} \times 10 + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 100 + 10 = 110$$

یا

۳ نفر یازدهم ۱ نفر باقی ۲ نفر یازدهم

۱۵ - گزینه ۲ باید ۵ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم به طوری که:

(الف) a باشد و c و b نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی $\binom{5}{4} = 5$ حالت(ب) c باشد و b و a نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی $\binom{5}{4} = 5$ حالت

ج) c و b و a نباشند یعنی ۵ عضو از ۵ عضو یعنی $\binom{5}{5} = 1$

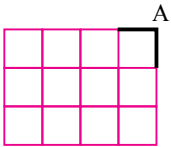
بنابر اصل جمع کل حالات برابر است با $5 + 5 + 1 = 11$

۱۶ - گزینه ۴ می‌دانیم:
$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

هر ۳ نفر کلاس اول یا دوم یا سوم باشند:

$$\binom{5}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{7 \times 6 \times 5}{6} + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 10 + 35 + 20 = 65$$

۱۷ - گزینه ۲ کافی است از کل مستطیل‌های شکل مقابل، مستطیل‌هایی که دارای رأس A هستند را کنار بگذاریم.



تعداد کل مستطیل‌ها برابر تعداد انتخاب ۲ خط عمودی از ۵ خط عمودی و ۲ خط افقی از ۴ خط افقی است. تعداد مستطیل‌های دارای رأس A برابر تعداد انتخاب یک خط عمودی از ۴ خط عمودی و انتخاب یک خط افقی از ۳ خط افقی است (تمامی خطوط به جز خطوطی که شامل A هستند)

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} - \binom{3}{1} \binom{4}{1} = 6 \times 10 - 3 \times 4 = 48$$

۱۸ - گزینه ۴ روش اول: با حرکت راست و بالا در شبکه 5×3 ، باید ۸ حرکت انجام شود تا از نقطه A به B برسیم. از این ۸ حرکت باید ۳ حرکت روبه بالا داشته باشد. تعداد حالات خواسته شده برابر تعداد انتخاب‌های این ۳ حرکت در میان ۸ حرکت است:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

روش دوم: ۸ حرکت باید انجام شود که ۳ تای آن روبه بالا و ۵ تای آن روبه راست است. اگر حرکت رو به بالا را با V و حرکات روبه راست را با R نمایش دهیم تعداد خواسته شده برابر تعداد کلمات ۸ حرفی با ۳ حرف V و ۵ حرف R است. مثلاً کلمه $VRRRRVRR$ به معنی یک حرکت به بالا، ۳ حرکت به راست، ۲ حرکت به بالا و ۲ حرکت به راست است، تعداد این کلمات برابر است با:

$$\frac{8!}{3!5!} = 56$$

۱۹ - گزینه ۱ حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: هر ۵ نفر از بین a_5 و a_1 انتخاب شوند:

$$\binom{6}{5} = 6$$

حالت ۲: ۴ نفر از بین a_5 و a_1 و یک نفر از برادران a_1 و a_4 انتخاب شود.

$$\binom{6}{4} \binom{2}{1} = 15 \times 2 = 30$$

حالت ۳: ۴ نفر از بین a_5 تا a_1 و یک نفر از برادران a_3 و a_4 انتخاب شود.

$$\binom{6}{4} \binom{2}{1} = 15 \times 2 = 30$$

حالت ۴: ۳ نفر از بین a_5 تا a_1 و یک نفر از a_1 و a_4 و یک نفر از a_3 و a_4 انتخاب شود.

$$\binom{6}{3} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 20 \times 2 \times 2 = 80$$

کل حالات:

طبق اصل جمع $\rightarrow 6 + 30 + 30 + 80 = 146$

۲۰ - گزینه ۴ حالت (الف): یک نفر از تهران و سه نفر از ۳ شهر دیگر در تیم هست:

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 4 \times 4 \times 3^3 = 16 \times 27 = 432$$

از هر شهر یک نفر $\underbrace{\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}$ شهرهای دیگر فرد تهرانی

حالت (ب) از تهران نماینده نداریم و از ۴ شهر دیگر هر کدام یک نفر حضور دارد:

$$\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 3^4 = 81$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌ها برابر $432 + 81 = 513$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴

۴ - ۳

۷ - ۲

۱۰ - ۴

۱۳ - ۴

۱۶ - ۴

۱۹ - ۱

۲ - ۴

۵ - ۲

۸ - ۳

۱۱ - ۲

۱۴ - ۲

۱۷ - ۲

۲۰ - ۴

۳ - ۳

۶ - ۱

۹ - ۴

۱۲ - ۱

۱۵ - ۲

۱۸ - ۴



۱- سه کتاب ریاضی و چهار کتاب شیمی و سه کتاب عربی متفاوت را کنار هم می‌چینیم، با چه احتمالی کتاب‌های ریاضی کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$

۲- از بین اعداد ۱ تا ۹، دو عدد متمایز را انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه حاصل ضرب این دو عدد زوج باشد، کدام است؟

- ① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{3}{18}$ ③ $\frac{10}{18}$ ④ $\frac{13}{18}$

۳- جدول زیر تعداد لامپ‌های سالم و معیوب را در دو کارخانه A و B نشان می‌دهد. به تصادف لامپی را انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این لامپ معیوب است؟

نوع لامپ کارخانه	سالم	معیوب
A	۱۳	۸
B	۱۴	۱۰

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{6}{11}$

۴- ۳ اتومبیل سیاه و ۳ اتومبیل سفید در یک ردیف، به تصادف کنار هم پارک شده‌اند. احتمال آنکه اتومبیل‌های سیاه و اتومبیل‌های سفید یک در میان قرار گرفته باشند، کدام است؟ (اتومبیل‌ها با یکدیگر متفاوتند.)

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{20}$ ④ $\frac{1}{24}$

۵- طبق نظرسنجی که بین دو درس ریاضی و زیست در یک مدرسه از ۱۰۰ نفر صورت گرفته؛ تعداد ۳۰ دانش‌آموز فقط به درس ریاضی علاقه دارند و ۵۰ دانش‌آموز به درس ریاضی علاقه ندارند. اگر از این مدرسه فردی به تصادف انتخاب شود، احتمال این که علاوه بر ریاضی به زیست نیز علاقه داشته باشد، چقدر است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{5}$

۶- می‌خواهیم ۴ زوج (زن و شوهر) را در یک ردیف به طور تصادفی کنار هم بنشانیم. احتمال آن که هر زوج (زن و شوهر) دقیقاً کنار هم نشسته باشند، کدام است؟

- ① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{1}{90}$ ③ $\frac{1}{105}$ ④ $\frac{1}{110}$

۷- اگر فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ باشد و یک عدد به تصادف انتخاب کنیم، پیشامد آن که عدد انتخابی مضرب ۲ باشد ولی مضرب ۳ نباشد، چند عضو دارد؟

- ① ۳۴ ② ۴۴ ③ ۳۶ ④ ۴۶

۸- در جعبه‌ای ۱۰ جفت کفش متمایز قرار دارد، اگر ۵ لنگه از آن بیرون آوریم، چقدر احتمال دارد که حداقل یک جفت از آن بیرون آمده باشد؟

- ① $\frac{168}{323}$ ② $\frac{21}{1292}$ ③ $\frac{155}{323}$ ④ $\frac{1271}{1292}$

۹- یک فروشگاه دو کارت تخفیف A و B در اختیار مشتریان می‌گذارد. اگر ۲۶ درصد مشتریان فقط کارت A ، ۴۱ درصد آن‌ها فقط کارت B و ۸ درصد آن‌ها هر دو کارت را در اختیار داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت تخفیف، از فروشگاه خرید کنند؟

- ① ۶۷ درصد ② ۵۹ درصد ③ ۷۵ درصد ④ ۸۳ درصد



۱۰- در کدام بررسی، اندازه نمونه همواره برابر اندازه جامعه است؟

- ① نمونه تصادفی ② دسته‌بندی ③ سرشماری ④ مصاحبه

۱۱- ۴ نفر در یک شرکت کار می‌کنند، با چه احتمالی، حداقل ۲ نفر آن‌ها در یک فصل استخدام شده‌اند؟

- ① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{29}{32}$

۱۲- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ معادل کدام گزینه است؟

- ① نه A رخ دهد نه B ② حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.
③ دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. ④ حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

۱۳- دو رأس یک n ضلعی به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. اگر احتمال این که دو رأس مجاور باشند برابر $\frac{1}{5}$ باشد، مقدار n کدام است؟

- ① ۸ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۱

۱۴- هر یک از مقادیر «۵۰ سانتی‌متر، قرمز، درجه ۲، متوسط» به ترتیب از راست به چپ مربوط به چه نوع متغیری می‌تواند باشد؟

- ① کمی گسسته، کیفی اسمی، کمی گسسته، کیفی ترتیبی ② کمی پیوسته، کیفی اسمی، کمی گسسته، کیفی اسمی
③ کمی گسسته، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی، کیفی اسمی ④ کمی پیوسته، کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی

۱۵- ارزشیابی در مقطع ابتدایی، تعداد کارمندان یک اداره و سن افراد به ترتیب چه متغیرهایی هستند؟

- ① کیفی ترتیبی - کمی پیوسته - کمی گسسته ② کیفی اسمی - کمی گسسته - کمی پیوسته
③ کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته ④ کیفی ترتیبی - کمی گسسته - کمی پیوسته

۱۶- مجموع تعداد متغیرهای کیفی ترتیبی و کمی پیوسته در بین متغیرهای زیر کدام است؟

سرعت اتومبیل - زمان مطالعه روزانه یک دانش‌آموز - رنگ چشم دانش‌آموزان یک کلاس - تعداد تماس‌های تلفنی یک فرد در هفته - دمای هوای اتاق

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۱۷- در کدام گزینه هر دو متغیر داده شده کاملاً از یک نوع هستند؟

- ① طول مدت مکالمه تلفنی - تعداد نامه‌های پستی ② میزان بارندگی - جنسیت افراد
③ گنجایش آب تانکر - وزن نامه‌های یک صندوق ④ مراحل تکامل یک قورباغه - سن دانشجویان شرکت‌کننده در یک دوره

۱۸- هریک از متغیرهای «شاخص توده بدن افراد یک کلاس»، «نوع شغل افراد یک جامعه» و «درجه‌های اشخاص در ارتش» به ترتیب چه نوع کمیتی هستند؟

- ① کمی پیوسته، کیفی ترتیبی، کمی گسسته ② کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کیفی ترتیبی
③ کمی پیوسته، کیفی اسمی، کیفی ترتیبی ④ کیفی اسمی، کیفی اسمی، کمی گسسته

۱۹- چندتا از گزاره‌های زیر درست نیست؟

- دو کلمه «آمار» و «علم آمار» از لحاظ مفهوم هیچ تفاوتی باهم ندارند.
- اگر کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور، صفر و بیست باشد، آنگاه هر عددی از این بازه می‌تواند، نشان‌دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد.

- اگر متغیری که دو مقدار a و b را اختیار می‌کند و هر مقدار بین a و b را هم بتواند اختیار کند، آن متغیر را متغیر پیوسته گویند.
- کیفیت هلو متغیرهای کیفی هستند.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴



۲۰- در کدام یک از گزینه‌های زیر فقط دو متغیر کیفی ترتیبی وجود دارد؟

- ① قد دانش‌آموزان یک کلاس، سن افراد یک ساختمان، مراحل رشد یک انسان
- ② شدت بارش باران (کم، متوسط، زیاد)، میزان تحصیلات افراد، مراحل رشد انسان
- ③ میزان تحصیلات افراد، رنگ ماشین‌های یک نمایشگاه، ملیت افراد یک هتل
- ④ شدت بارش باران (کم، متوسط، زیاد)، گروه خونی دانش‌آموزان مدرسه، میزان تحصیلات افراد

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ فضای نمونه‌ای آزمایش $n(S) = 10!$ است.

بسته‌ی کتاب‌های ریاضی درون خود $3!$ جایگشت دارند و این بسته و هفت کتاب دیگر نیز $8!$ جایگشت دارند بنابراین:

$$n(A) = 3! \times 8!$$

پس $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 8!}{10!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 8!}{10 \times 9 \times 8!} = \frac{1}{15}$ است.

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید. حاصل ضرب دو عدد، زوج است هرگاه هر دو زوج باشند یا یکی زوج و دیگری فرد باشد

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8}{2!} = 36$$

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد حالات انتخاب دو عدد زوج} &= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \\ \text{تعداد حالات انتخاب یک فرد و یک زوج} &= \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 4 \times 5 = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20 + 6 = 26$$

$$P(\text{حاصل ضرب زوج}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

۳ - گزینه ۳ با توجه به جدول داریم:

$$\text{تعداد لامپ‌های معیوب دو کارخانه} = 8 + 10 = 18$$

$$\text{تعداد کل لامپ‌ها} = 8 + 10 + 14 + 13 = 45$$

پس $P(A) = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ است.

۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$

فرض کنیم ماشین اول سفید باشد، ۳ ماشین سفید با هم $3!$ و ۳ ماشین سیاه با هم $3!$ جایگشت دارند.

حال فرض کنیم ماشین اول سیاه باشد، ۳ ماشین سفید با هم $3!$ و ۳ ماشین سیاه با هم $3!$ جایگشت دارند.

بنابراین:

$$P(A) = \frac{2 \times 3! \times 3!}{6!} = \frac{2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{10}$$

۵ - گزینه ۴

نظرسنجی از ۱۰۰ نفر صورت گرفته، پس: $n(S) = 100$ اگر A و B را به ترتیب مجموعه علاقه‌مندان به درس ریاضی و زیست در نظر بگیریم، آن‌گاه طبق فرض:

$$\begin{cases} n(A - B) = 30 \\ n(A') = 50 \end{cases}$$

داریم:

$$n(A) = n(S) - n(A') = 100 - 50 = 50$$

مجموعه اعضای A به دو دسته $A - B$ و $A \cap B$ تقسیم می‌شوند، پس:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow 50 = 30 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 20$$

پس احتمال موردنظر یعنی $P(A \cap B)$ برابر می‌شود با:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

۶ - گزینه ۳ ۴ زوج داریم که به ۴ حالت می‌توانند در کنار هم قرار گیرند. هر زوج نیز به ۲ حالت می‌توانند کنار هم بنشینند. پس:

$$n(A) = 4! \times (\overset{\text{جایگشت هر زوج}}{2!})^4 = 24 \times 16 = 384$$

جایگشت زوج

$n(S) = 8!$ تعداد حالات قرار گرفتن ۸ نفر در کنار هم

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{384}{8!} = \frac{1}{105}$$

۷ - گزینه ۱

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

عددی که مضرب ۲ باشد و مضرب ۳ نباشد عددی است که زوج باشد و مضرب ۶ نباشد. (چون مضارب ۶ هم مضرب ۲ هستند و هم مضرب ۳)، پس:

$$\left. \begin{aligned} S &= \{2, 4, 6, \dots, 100\} \Rightarrow n(A) = 50 \\ B &= \{6, 12, \dots, 96\} \Rightarrow n(B) = 16 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 16 = 34$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می آید.

۸ - گزینه ۳ می دانیم:

$$n(S) = \binom{20}{5} = \binom{20}{5}$$

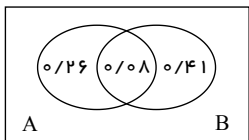
$$P(\text{هیچ جفت}) = 1 - P(\text{حداقل ۱ جفت})$$

$$P(\text{هیچ جفت}) = \binom{20}{5} \times \left(\text{انتخاب ۱ لنگه از هر جفت} \right) \times \left(\text{انتخاب ۵ جفت از ۱۰ جفت} \right)$$

$$= \frac{\binom{10}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{10!}{5! \times 5!} \times 2^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} \times 32 = \frac{168}{323}$$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل ۱ جفت}) = 1 - \frac{168}{323} = \frac{155}{323}$$

۹ - گزینه ۳ حداقل یکی از دو کارت، یعنی $A \cup B$ و احتمال آن به صورت زیر است:



$$P(A \cup B) = 0,26 + 0,08 + 0,41 = 0,75$$

۱۰ - گزینه ۳ در سرشماری، نمونه شامل تمام اعضای جامعه است، بنابراین اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است.

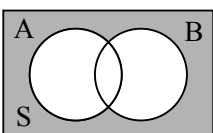
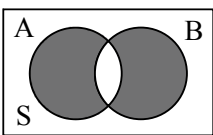
۱۱ - گزینه ۴ فرض می کنیم هیچ کدام از این ۴ نفر در یک فصل استفاده نشده باشند.

$$P(A') = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

حال از احتمال متمم استفاده می کنیم:

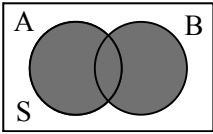
$$P(A) = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$$

۱۲ - گزینه ۳ با توجه به نمودار و دقیق از دو پیشامد A یا B رخ دهد یعنی: $(A - B) \cup (B - A)$

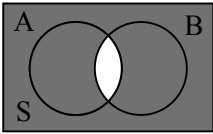


$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، برابر است با: $A \cup B$



حداکثر یکی از دو پیشامد A رخ دهد، برابر است با: $A \cap B'$



۱۳ - گزینه ۴ روش اول: احتمال مجاور بودن دو رأس انتخابی از یک ضلعی n برابر $\frac{n}{\binom{n}{2}}$ است، پس:

$$\frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{n-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

روش دوم: برای محاسبه احتمال مجاور بودن دو رأس انتخابی از یک ضلعی n می‌توان به این گونه عمل کرد. فرض می‌کنیم رأس اول مشخص است، برای رأس دوم $n-1$ حالت ممکن و فقط دو

حالت مطلوب است، پس $P = \frac{2}{n-1}$.

<p>۱۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: متغیر</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> قابل اندازه‌گیری: کمی </td> <td style="padding-left: 5px;"> اگر دو مقدار a, b را بپذیرد، هر مقدار بین آنها را نیز می‌پذیرد: پیوسته غیر پیوسته: گسسته </td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> غیر قابل اندازه‌گیری: کمی </td> <td style="padding-left: 5px;"> دارای ترتیب خاص: ترتیبی بدون ترتیب خاص: اسمی </td> </tr> </table>	قابل اندازه‌گیری: کمی	اگر دو مقدار a, b را بپذیرد، هر مقدار بین آنها را نیز می‌پذیرد: پیوسته غیر پیوسته: گسسته	غیر قابل اندازه‌گیری: کمی	دارای ترتیب خاص: ترتیبی بدون ترتیب خاص: اسمی
قابل اندازه‌گیری: کمی	اگر دو مقدار a, b را بپذیرد، هر مقدار بین آنها را نیز می‌پذیرد: پیوسته غیر پیوسته: گسسته			
غیر قابل اندازه‌گیری: کمی	دارای ترتیب خاص: ترتیبی بدون ترتیب خاص: اسمی			

۵۰ سانتی‌متر: کمی پیوسته / قرمز: کیفی اسمی / درجه ۲: کیفی ترتیبی / متوسط: کیفی ترتیبی

۱۵ - گزینه ۴

ارزشیابی در مقطع ابتدایی کیفی و دارای ترتیب است (نیاز به تلاش بیشتر، قابل قبول، خوب و خیلی خوب) ← متغیر کیفی ترتیبی

تعداد کارمندان یک اداره کمی است و پیوسته نیست زیرا نمی‌تواند هر مقداری (مثلاً ۳٫۵) را اختیار کند. ← کمی گسسته

سن افراد کمی است و می‌تواند هر مقداری را اختیار کند. ← کمی پیوسته

۱۶ - گزینه ۲ نوع متغیرهای داده شده را مشخص می‌کنیم.

سرعت اتومبیل: کمی پیوسته / زمان مطالعه روزانه یک دانش‌آموز: کمی پیوسته

رنگ چشم دانش‌آموزان یک کلاس: کیفی اسمی / تعداد تماس‌های تلفنی یک فرد در هفته: کمی گسسته / دمای هوای اتاق: کمی پیوسته

۱۷ - گزینه ۳ گنجایش آب تانکر و وزن نامه‌ها هر دو کمی پیوسته هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: طول مدت مکالمه: کمی پیوسته، تعداد نامه: کمی گسسته

گزینه ۲: میزان بارندگی: کمی پیوسته، جنسیت: کیفی اسمی

گزینه ۴: مراحل تکامل قورباغه: کیفی ترتیبی، سن دانشجویان: کمی پیوسته

۱۸ - گزینه ۳ شاخص توده بدن کمی است که از تقسیم وزن شخص بر مجذور قد او به دست می‌آید و هر مقدار را می‌تواند اختیار کند، بنابراین متغیر کمی پیوسته است. شغل افراد یک جامعه، مقدار ندارد و فقط دارای نوع هستند و ترتیب خاصی نیز ندارند، بنابراین متغیر کیفی اسمی است. درجه‌های اشخاص در ارتش نیز دارای ترتیب خاصی است، پس متغیر کیفی ترتیبی است.

۱۹ - گزینه ۲ گزاره‌های ۱ و ۲ درست نیستند.

۲۰ - گزینه ۴ نوع متغیرهای همه گزینه‌ها را به ترتیب می‌نویسیم:

گزینه ۱: کمی پیوسته - کمی پیوسته - کیفی ترتیبی

گزینه ۲: هر ۳ متغیر کیفی ترتیبی هستند.

گزینه ۳: کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کیفی اسمی

گزینه ۴: کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کیفی ترتیبی

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۳

۱۳ - ۴

۱۶ - ۲

۱۹ - ۲

۲ - ۴

۵ - ۴

۸ - ۳

۱۱ - ۴

۱۴ - ۴

۱۷ - ۳

۲۰ - ۴

۳ - ۳

۶ - ۳

۹ - ۳

۱۲ - ۳

۱۵ - ۴

۱۸ - ۳